Rachunek prawdopodobieństwa 2B

Lista zadań nr 6

1. Niech $\{X_i\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $U(0,1)$. Pokaż, że

- dla każdego $\beta \in (0, 1/2)$ istnieją stałe μ i σ^2 takie, że

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{n=1}^{n} X_i^{-\beta} - n\mu\right)$$

  zbiega według rozkładu do zmiennej losowej rozkładu normalnego $N(0,1)$.

- dla każdego $\beta \in (1/2, 1)$ istnieje stała $\alpha \in (0,2)$ oraz ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ takie, że

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{n=1}^{n} X_i^{-\beta} - a_n\right)$$

  zbiega według rozkładu do stabilnej zmiennej losowej z parametrem α.

2. Niech X_t będzie rozkładem Poissona z parametrem 2. Oblicz

- $\mathbb{P}[Y_3 \geq 2]$;
- $\mathbb{P}[Y_4 \geq Y_1 + 2 | Y_1 = 4]$;
- $\mathbb{P}[Y_1 = 1 | Y_3 = 4]$.

3. Niech X_t będzie rozkładem Poissona z parametrem 1. Znajdź funkcję $a(t)$ taką, że $X_t - a(t)$ jest martyngałem.

4. Niech X_t będzie procesem Poissona z parametrem λ i niech T będzie zmienną losową niezależną od X_t o rozkładzie wykładniczym ze średnią $1/\mu$. Znajdź rozkład $N(t) = X_{t+L} - X_t$.

5. Niech X_t będzie procesem Poissona z parametrem λ. Załóżmy, że w każdym momencie skoku przeprowadzane są niezależnie losowe eksperymenty, w których możliwe jest k wyników $\{a_i : \ 1 \leq i \leq k\}$ z prawdopodobieńtwami $\{p_i \ 1 \leq i \leq k\}$. Niech $X_t(i)$ będzie procesem opisującym liczbę wyników a_i w czasie $[0,t]$. Pokaż, że $X_t(i)$ są niezależnymi procesami Poissona z parametrami λp_i.

6. Załóżmy, że X_t jest złożonym rozkładem Poissona z parametrem 2, w którym kolejne skoki mają rozkład $N(0,1)$. Oblicz $\mathbb{E}[X_t]$, $\mathbb{E}[X_t^2]$, $\mathbb{E}[e^{X_t}]$.