

TEORIA PRAWDOPODOBIENSTWA 1
LISTA ZADAŃ NR 1 - ROZGRZEWKA

0. Zapoznaj się z rozdziałami 1 i 2 ze *Wstępu do teorii prawdopodobieństwa*, J. Jakubowski, R. Sztencel.
1. Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ umieszczono 8 nierozróżnialnych wież, w taki sposób aby żadne dwie się nie biły. Na ile sposobów można to zrobić? Jak zmieni się wynik, gdy wieże będą rozróżnialne?
2. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania przez gracza podczas gry w pokera: pary, dwóch par, trójki, fulla, karety, koloru, pokera? Przypomnijmy, że talia składa się z 24 kart, a gracz dostaje 5 kart.
3. Na ile sposobów można ustawić 7 krzeseł białych i 3 czerwone przy okrągłym stole?
4. Ile jest różnych rozwiązań w zbiorze liczb naturalnych równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$. A jeżeli założymy ponadto, że $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$?
5. W klasie jest 15 uczniów. Na każdej lekcji odpytywany jest losowo jeden z nich. Oblicz prawdopodobieństwo, że podczas 16 lekcji zostanie przepytany każdy z nich.
6. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w potasowanej talii 52 kart wszystkie cztery asy znajdują się koło siebie.
7. Przez Los Angeles przebiega 5-pasmowa autostrada. Typowy kierowca co minutę zmienia losowo pas. Oblicz prawdopodobieństwo, że po 4 minutach będzie z powrotem na początkowym pasie (zakładając, że w międzyczasie się nie rozbije).
8. Na przyjęciu jest n osób. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spotkasz tam osobę, która obchodzi urodziny tego samego dnia co Ty? Dla jakich n to prawdopodobieństwo było większe niż $\frac{1}{2}$?
9. W Totolotku losuje się 6 z 49 liczb. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie nie będą dwoma kolejnymi liczbami naturalnymi?
10. Stefan Banach w każdej z kieszeni trzymał po pudełku zapalek. Początkowo każde z nich zawierało n zapalek. Za każdym razem kiedy Banach potrzebował zapalnik sięgał losowo do jednej z kieszeni i wyciągał jedną zapalnik. Oblicz prawdopodobieństwo, że w momencie gdy sięgnął po puste pudełko, w drugim pozostało jeszcze k zapalek.
11. Podczas imprezy mikołajkowej wszystkie n prezentów pozbawiono karteczek z imieniem adresata i losowo rozdano uczestnikom. Niech p_k oznacza prawdopodobieństwo, że dokładnie k osób dostanie własny prezent. Oblicz p_k oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} p_k$.
12. Grupa składająca się z $2n$ pań i $2n$ panów została podzielona na dwie równoliczne grupy. Znajdź prawdopodobieństwo, że każda z tych grup składa się z takiej samej liczby pań i panów. Przybliż to prawdopodobieństwo za pomocą wzoru Stirlinga.
- 13*. Więźniowie.** Pewien sułtan więził 100 osób. Pewnego dnia postanowił ich zgładzić. Jako, że był znany ze swego miłosierdzia dał im ostatnią szansę. Postawił przed nimi następujące zadanie. Każdemu więźniowi przyporządkował liczbę. Następnie w pokoju obok umieścił w rzędzie kolejno 100 pudełek i do każdego z nich włożył losową liczbę od 1 do 100 (w każdym pudełku inną). Więźniowie po kolei, pojedynczo, wchodzi do pokoju z pudełkami. Mogą otworzyć 50 pudełek, aby znaleźć swój numer, ale pokój muszą pozostawić dokładnie w takim samym stanie w jakim go zastali. Następnie opuszczają pokój wychodząc innym wyjściem i nie mają możliwości skontaktowania się z pozostałymi osobami. Więźniowie zostaną ocaleni, jeżeli z nich każdy znajdzie swój numer. Jeżeli każdy z nich otwiera losowe 50 pudełek, to szanse ich przeżycia wynoszą $\frac{1}{2^{100}} \approx 7,8 \cdot 10^{-31}$. Czy mają oni lepszą strategię?