Teoria Prawdopodobieństwa 1
Lista zadań nr 2

1. Udowodnij wzór włączeń i wyłączeń

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

2. (*Nierówność Boole'a*) Udowodnij, że

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_i).$$

3. Udowodnij, że

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i) - (n-1).$$

4. Pokaż, że jeżeli $\mathbb{P}(A_i) = 1$ dla $i \ge 1$, to $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$.

5. Niech $A\cup B\cup C = \Omega$, $\mathbf{P}(B) = 2\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(C) = 3\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A\cap C) = \mathbf{P}(B\cap C)$. Pokaż, że $1/6 \le \mathbf{P}(A) \le 1/4$, przy czym oba ograniczenia są osiągalne.

6. Rzucamy symetryczną monetą do chwili otrzymania orła. Skonstruować zbiór zdarzeń elementarnych i wybrać odpowiednie prawdopodobieństwo. Jaka jest szansa, że liczba rzutów będzie parzysta? podzielna przez 3? podzielna przez m?

7. 10 małżeństw usiadło losowo przy okrągłym stole. Oblicz prawdopodobieństwo, że żaden mąż nie siedzi przy swojej żonie.

8. (*Kolekcjoner kuponów*) W sprzedaży są kupony N różnych typów. Wylosowanie każdego z nich jest jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwo, że kolekcjoner po zakupie n kuponów ($n \ge N$) posiada ich komplet.

9. Na odcinku $[0,1]$ umieszczono losowo punkty L i M. Obliczyć prawdopodobieństwo, że:

a) środek odcinka LM należy do $[0,1/3]$;
b) z L jest bliżej do M niż do zera.

10. Z przedziału $[0,1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z tych odcinków da się skonstruować trójkąt.

11. Na nieskończoną szachownicę o boku a rzuca się monetę o średnicy $2r < a$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że

a) moneta znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól;
b) moneta przetnie się z co najwyżej jednym bokiem szachownicy.

12. Igłę o długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \ge l$. Znajdź prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski.

13. Z przedziału $[0,1]$ wybrano losowo liczbę x. Znaleźć prawdopodobieństwo, że jest to liczba: wymierna, niewymierna, algebraiczna, przestępna.

14. Niech $A_1,\ldots,A_{2019} \in \mathcal{F}$ będą zbiorami o własności $\mathbb{P}[A_i] \ge 1/2$. Wykaż, że istnieje $\omega\in\Omega$ taka, że $\omega \in A_i$ dla przynajmniej 1010 wartości i.

15. Uzasadnij, że σ-ciało nie może być nieskończonym zbiorem przeliczalnym.

16. Oznaczmy przez $\mathcal{B}_0$ ciało składające się ze skończonych sum rozłącznych przedziałów $(a, b]$ zawartych w odcinku $(0, 1]$. Określmy na $\mathcal{B}_0$ funkcję P taką, że $P(A) = 1$ lub 0 w zależności od tego, czy zbiór A zawiera przedział postaci $(1/2, 1/2+\varepsilon]$ dla pewnego $\varepsilon > 0$, czy też nie. Pokaż, że P jest miarą addytywną, ale nie przeliczalnie addytywną.

17. Na rodzinie wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$ określamy miarę probabilistyczną $\mathbb{P}_n$ wzorem

$$\mathbb{P}_n(A) = \frac{|\{m : \ 1 \leq m \leq n, m \in A\}|}{n}.$$

Mówimy, że zbiór A ma gęstość

$$D(A) = \lim_n \mathbb{P}_n(A)$$

jeżeli istnieje powyższa granica. Niech $\mathcal{D}$ oznacza rodzinę zbiorów posiadających gęstość.

a) Pokaż, że D jest skończenie addytywna na $\mathcal{D}$, ale nie jest przeliczalnie addytywna.

b) Czy $\mathcal{D}$ jest σ-ciałem?

c) Wykaż, że jeżeli $x \in [0, 1]$, to istnieje zbiór A taki, że $D(A) = x$.

18. Niech Ω będzie przestrzenią przeliczalnych ciągów 0-1, tj. $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Dla $\omega \in \Omega$ oznaczmy przez ω_n wartość n-tej składowej. Dla ustalonego ciągu $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \{0, 1\}^n$ niech

$$C_u = \{\omega : \ \omega_i = u_i; i = 1, \ldots, n\}.$$

Zbiór C_u nazywamy cylindrem rzędu n. Każdemu takiemu zbiorowi przypisujemy miarę probabilistyczną $\mathbb{P}$ równą 2^{-n}. Oznaczmy przez $\mathcal{F}_0$ ciało składające się ze zbioru pustego oraz skończonych sum rozłącznych cylindrów. W naturalny sposób definiujemy $\mathbb{P}$ na $\mathcal{F}_0$.

a) Pokaż, że miara $\mathbb{P}$ jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{F}_0$.

b) Utożsamiając Ω z przedziałem (0,1] porównaj miarę $\mathbb{P}$ z miarą Lebesgue'a.