Teoria Prawdopodobieństwa 1
Lista zadań nr 3

1. W urnie znajduje się $n-1$ kul białych i jedna czarna. Losujemy po jednej kuli aż do momentu, gdy wylosujemy czarną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wykonamy k losowań, jeżeli a) losujemy bez zwracania b) losujemy ze zwracaniem?

2. W latach dziewięćdziesiątych popularny był teleturniej *Idź na całość*. Zazwyczaj w jego finale uczestnik powinien wskazać jedne z trzech drzwi za którymi znajduje się samochód, za pozostałymi ukryty był Zonk (czarny kot). Finalista wskazywał jedne z drzwi, prowadzący teleturniej Zygmunt Chajzer otwierał jedne z pozostałych drzwi za którymi był kot. Następnie uczestnik miał prawo zmiany swojego wyboru. Co powinien zrobic?

3. Czterej gracze dostali po 13 kart. Jeden z nich zobaczył przypadkowo u sąsiada a) asa pik, b) jakiegoś asa czarnego koloru, c) jakiegoś asa. Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe, że ten gracz nie ma asa.

4. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeżeli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów. Również nie-dyslektyk może popełnić co najmniej 6 błędów i dzieje sie to z prawdopodobieństwem 0,1. Jasiu popełnił 6 błędów. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest dyslektykiem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w kolejnym teście też popełni co najmniej 6 błędów?

5. Alicja i Bob grają w pokera. Bob ma silną rękę i zaczął od 5 dolarów. Prawdopodobieństwo, że Alicja ma silniejsze karty wynosi 0,04. Gdyby Alicja miała mocniejsze (słabsze) karty podbiłaby stawkę z prawdopodobieństwem 0,9 (0,1). Alicja podbiła stawkę, jakie jest prawdopodobieństwo, że ma lepsze karty?

6. Mamy dwie urny i 50 kul. Połowa z kul jest biała, a połowa czarna. Jak rozłożyć kule do urn, aby zmaksymalizować prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana kula z losowej urny jest biała (tzn. najpierw losujemy urnę, a potem z wybranej urny losujemy kulę)?

7. Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry. Następnie rzucamy ponownie tymi kostkami, na których nie wypadły "jedynki". Obliczyć prawdopodobieństwo, że na wszystkich trzech kostkach będą "jedynki".

8. Kierowcy dzielą się na ostrożnych (jest ich 95% i taki kierowca powoduje w ciągu roku wypadek z prawdopodobieństwem 0.01) i piratów (jest ich 5% i taki kierowca powoduje w ciągu roku wypadek z prawdopodobieństwem 0.5). Wybrany losowo kierowca nie spowodował wypadku w pierwszym i drugim roku. Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe, że spowoduje wypadek w trzecim roku.

9. Na n kartonikach n różnych liczb rzeczywistych. Kartoniki włożono do pudełka, dobrze wymieszano, a następnie losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k będzie zdarzeniem, że k-ta wylosowana liczba jest większa od wszystkich poprzednich. Udowodnij, że $P(A_k) = 1/k$, dla $k = 1, 2, \dots, n$ oraz że zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ są niezależne.

10. Liczby $1, 2, \dots, 2n$ ustawiono losowo w ciąg $(a_1, \dots, a_{2n})$. Zbadaj niezależność zdarzeń $\{a_1 < a_{2n}\}, \{a_2 < a_{2n-1}\}, \dots, \{a_n < a_{n+1}\}$.

11. Zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ są niezależne i mają jednakowe prawdopodobieństwo p. Znaleźć prawdopodobieństwo, że: a) zajdą wszystkie naraz; b) nie zajdzie żadne; c) zajdzie dokładnie jedno; d) zajdzie tylko A_n; e) zajdzie przynajmniej jedno.

12. Pokaż, że σ-ciała $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dowolne zdarzenia $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_n$ są niezależne.

13. Uzasadnij, że jeżeli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne, to również σ-ciała generowane przez te zbiory są niezależne.

14. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną taką, że Ω jest zbiorem dyskretnym (skończonym lub przeliczalnym). Pokaż, że nie istnieje rodzina niezależnych zdarzeń $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takich, że $\mathbb{P}(A_n) = 1/2$ dla każdego n.

15. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathrm{Leb})$ i niech

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{2^n}$$

będzie nieskończonym rozwinięciem dwójkowym liczby $\omega \in [0,1]$. Udowodnij, że zbiory $A_n = \{\omega : \omega_n = 0\}$ są niezależne.

16*. Zapoznaj się z dowodem twierdzenia Kołmogorowa (dowód można znaleźć np. w rozdziale C.4 [JS]).