Teoria Prawdopodobieństwa 1
Lista zadań nr 4

1. Zdarzenia A_1, A_2,.. są niezależne i mają równe prawdopodobieństwa. Jaka jest szansa, że zajdzie skończenie wiele zdarzeń A_n?

2. Zdarzenia A_1, A_2,.. są niezależne i $\mathbb{P}(A_n) = p_n$. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi co najmniej jedno ze zdarzeń A_n wtedy i tylko wtedy, gdy z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń A_n.

3. Znajdź przykład przestrzeni probabilistycznej oraz ciągu zbiorów A_n takich, że $\sum \mathbb{P}(A_n) = \infty$, ale $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

4*. Rzucamy nieskończenie wiele razy symetryczną monetą. Niech A_n-w pierwszych n rzutach było tyle samo orłów co reszek. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskoczenie wiele zdarzeń A_n.

5. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz funkcja $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Uzasadnij, że jeżeli $X^{-1}(a, b) \in \mathcal{F}$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, to X jest zmienną losową.

6. Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i funkcji $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, która nie jest zmienną losową.

7. Wyznacz $\mu(\{1/2\})$, $\mu([0, 1/2])$ i $\mu((0, 0.55))$, wiedząc, że dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa μ dana jest wzorem

$$F_\mu(x) \;=\; (0.1 + x)\mathbb{1}_{[0,0.5)}(x) + (0.4 + x)\mathbb{1}_{[0.5,0.55)}(x) + \mathbb{1}_{[0.55,\infty)}(x)\ .$$

8. Na skrzyżowaniu zamontowana jest sygnalizacja świetlna. W jednym z kierunków światło czerwone świeci się przez minutę, a zielone pół minuty. Samochód dojeżdża do skrzyżowania w losowym momencie. Niech X oznacza czas spędzony na skrzyżowaniu. Wyznacz rozkład X oraz dystrybuantę. Załóżmy, że po 20 sekundach samochód wciąż nie przejechał skrzyżowania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że opuści je w ciągu najbliższych 10 sekund?

9. Niech X będzie zmienną losową o dystrybuancie F. Załóżmy, że F jest ściśle rosnąca na obrazie X. Niech $Y = F(X)$. Pokaż, że Y ma rozkład $U([0, 1])$.

10. Niech U będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Znajdź dystrybuanty i rozkłady: $Y = U + 2$, $Y = U^2$, $Y = 1/(U + 1)$, $Y = \log(U + 1)$, $Y = |U - 1/2|$.

11. Pokaż, że jeżeli rodzina $\mathcal{L}$ jest jednocześnie π-układem oraz λ-układem, to jest σ-ciałem.

12. *Twierdzenie Dynkina o $\pi - \lambda$ układach.* Załóżmy, że rodzina $\mathcal{K}$ jest π-układem, a rodzina $\mathcal{L}$ jest λ-układem. Jeżeli $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$, to $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}$. **Wskazówka:** Niech $\mathcal{L}_0$ będzie przekrojem wszystkich λ-układów zawierających $\mathcal{K}$. Wówczas $\mathcal{L}_0$ jest λ-układem i z poprzedniego zadania wystarczy pokazać, że jest również π-układem ...

13. Dane są dwie miary probabilistyczne μ i ν na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ takie, że dla dowolnej liczby $t > 0$ mamy $\nu([-t, t]) = \mu([-t, t])$. Uzasadnić, że $\mu(A) = \nu(A)$ dla dowolnego symetrycznego zbioru $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

14. Punkt x nazywamy punktem skokowym rozkładu μ na $\mathbb{R}$, gdy $\mu(\{x\}) > 0$. Pokaż, że rozkład prawdopodobieństwa μ może mieć co najwyżej przeliczalną liczbę punktów skokowych.

15. Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych. Wykaż, że jeżeli funkcja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ jest mierzalna, to $f(X_1, \ldots, X_n)$ jest zmienną losową. Wywnioskuj, że $X_1 + X_2$ oraz $X_1 \cdot X_2$ są zmiennymi losowymi. Uzasadnij, że $\inf_n X_n$, $\sup_n X_n$, $\liminf_n X_n$, $\limsup_n X_n$ są również zmiennymi losowymi.