TEORIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1
LISTA ZADAŃ NR 5

1. a) Niech X będzie zmienna losową o rozkładzie $U([2,20])$. Oblicz $\mathbb{P}[X > 5]$, $\mathbb{P}[5 < X < 7]$, $\mathbb{P}[X^2 - 12X + 35 > 0]$, $\mathbb{P}[X \in \mathbb{Q}]$.
b) Rozwiąż to samo zadanie, ale przy założeniu, że X jest liczbą losową z przedziału $[2,20]$ o rozkładzie zadanym gęstością $f(x) = Cx$, dla odpowiedniej stałej C.

2. Podaj przykład dystrybuanty, której zbiór punktów nieciągłości jest gęsty w $\mathbb{R}$.

3. (*Rozkład geometryczny* $\mathrm{Geom}(p)$) Wykonujemy doświadczenia Bernoulliego (z prawdopodobieństwem pojedynczego sukcesu p) aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X oznaczającej liczbę wykonanych doświadczeń.

4. (*Rozkład wykładniczy* $\mathrm{Exp}(\lambda)$) Przypuśćmy, że doświadczenia opisane w zadaniu poprzednim wykonuje się n razy na sekundę, zaś prawdopodobieństwo sukcesu wynosi λ/n, $\lambda > 0$. Wyznaczyć dystrybuantę czasu oczekiwania na pierwszy sukces X_n i zbadać jej zachowanie gdy $n \to \infty$.

5. Wykaż, że rozkłady z dwóch poprzednich zadań mają tzw. własność braku pamięci: jeśli X ma rozkład geometryczny bądź wykładniczy, to

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s),$$

gdzie $s, t \in \mathbb{N}$ w przypadku rozkładu geometrycznego oraz $s, t \in \mathbb{R}^+$ w przypadku rozkładu wykładniczego.
(*) Udowodnij, że są to jedyne procesy z własnością braku pamięci: geometryczny na $\mathbb{N}$, wykładniczy jest jedynym ciągłym rozkładem z brakiem pamięci na $\mathbb{R}^+$.

6. (*Rozkład Poissona* $\mathrm{Poi}(\lambda)$) Niech $p_{k,n}$ będzie prawdopodobieństwem zajścia dokładnie k sukcesów w n próbach Bernoulliego o prawdopodobieństwie pojedynczego sukcesu p_n. Dla każdego ustalonego $k \in \mathbb{N}$ wyznacz

$$\lim_{n\to\infty} p_{k,n} \ , \qquad \text{jeśli} \quad \lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0 \ .$$

7. Niech p będzie prawdopodobieństwem trafienia „szóstki" w grze *Lotto* (*Duży Lotek* - losowanie 6 z 49 liczb) w pojedynczym zakładzie. Wyznacz p. Załóżmy, że sprzedano $1/p$ zakładów, przy czym wszystkie zakłady są niezależne. Przybliż prawdopodobieństwo trafienia przynajmniej jednej „szóstki". Ile należałoby sprzedać zakładów, aby prawdopodobieństwo to wynosiło przynajmniej 0.95? Wskazówka: skorzystaj z poprzedniego zadania.

8. Zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego, tzn. rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

Udowodnij, że $1/X$ ma ten sam rozkład, co X.

9. Niech (X,Y) będzie 2-wymiarową zmienną losową o rozkładzie zadanym gęstością $f(x,y) = 3x$ dla $0 \le y \le x \le 1$ i $f(x,y) = 0$ poza tym zbiorem. Znajdź rozkłady brzegowe. Czy X i Y są niezależne?

10. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład z gęstością $g(x,y) = C \cdot xy \cdot \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$.
a) Wyznaczyć C.
b) Obliczyć $\mathbb{P}(X + Y \le 1)$.
c) Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X/Y.
d) Czy zmienne X i Y są niezależne?
e) Czy X/Y i Y są niezależne?

11. Z talii 52 kart losujemy ze zwracaniem 5 razy po jednej karcie. Niech X oznacza liczbę wyciągniętych pików, Y - liczbę wyciągniętych kierów, Z - liczbę wyciągniętych asów. Czy zmienne X i Y są niezależne?

Czy zmienne X i Z są niezależne?

12. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{U}[0,1]$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że a) $X+Y < 1/2$, b) $XY < 1/2$, c) $|X-Y| < 1/2$, d) $X^2+Y^2 \leq 1/2$, e) równanie $t^2+Xt+Y=0$ ma dwa rzeczywiste pierwiastki.

13. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na zbiorze $1, 2, \ldots, k$. Znajdź rozkład $Y = \min_{1\leq i\leq n} X_i$. Czy X_1 i Y są niezależne?

14. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 6)$ są niezależne i mają ten sam rozkład: $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2$.

a) Czy zmienne $X_1 + X_2$, X_1X_2 są niezależne?
b) Czy zmienne $X_1 + X_2$, X_3, $X_4 + X_5X_6$ są niezależne?
c) Czy zmienne X_1, X_1X_2, ..., $X_1X_2..X_n$ są niezależne?

15. Zmienne losowe X i Y są niezależne. Pokaż, że jeżeli X nie ma atomów, to $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

16. Momenty przybycia autobusów A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi X, Y o rozkładzie wykładniczym z parametrami α i μ.

a) Znaleźć rozkład momentu przybycia pierwszego autobusu.
b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że autobus A przyjedzie pierwszy.

17. Z odcinka $[0,1]$ wybieramy kolejno niezależnie nieskończenie wiele liczb $X_1, X_2, \ldots$, każda o rozkładzie jednostajnym. Udowodnij, że

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_1X_2\ldots X_n = 0) = 1.$$