TEORIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1
LISTA ZADAŃ NR 6

1. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Udowodnić, że zmienne X/Y oraz $X+Y$ są niezależne.

2. Zmienne losowe $X_1, .., X_n$ są niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami λ_i. Pokaż, że $X_1 + .. + X_n$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + .. + \lambda_n$.

3. Załóżmy, że X_1 i X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio $N(m_1, \sigma_1)$ i $N(m_2, \sigma_2)$. Oblicz rozkład zmiennej losowej $X_1 + X_2$.

4. Alicja wybrała się do kasyna w Las Vegas mając przy sobie 255$. Jako cel postawiła sobie wygranie 1 dolara i wyjście z kasyna z kwotą 256$. Podczas tej wizyty obstawiała kolory. Wszystkie pola poza 0 i 00 są czerwone lub czarne (po 18 pól). Poprawne wskazanie koloru (z prawdopodobieństwem 18/38) podwaja zaryzykowaną kwotę. Alicja zastosowała następującą strategię: postanowiła, że będzie grać kolejno o 1$, 2$, 4$, 8$, 16$, 32$, 64$, 128$. Jeżeli w jednej z gier wygra, zabiera nagrodę i opuszcza kasyno z 256 dolarami. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jej się powiodło. Obliczyć wartość oczekiwaną wygranej.

5. Oblicz $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}X$ jeżeli X jest zmienną o rozkładzie: a) $\mathrm{Bin}(n,p)$, b) $\mathrm{Poiss}(\lambda)$, c) $\mathrm{Exp}(\lambda)$, d) $\mathrm{Geom}(p)$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0,1]$. Obliczyć $\mathbb{E}Y$ i $\mathrm{Var}Y$ jeżeli a) $Y = \sin(\pi X)$, b) $Y = \cos^2(\pi X)$, c) $Y = -\log X$.

7. Zmienna losowa ma rozkład o gęstości $g(x) = \frac{3}{8}x^2 \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}[1/(1+X^3)]$, $\mathrm{Var}X^2$.

8. W urnie jest $b \geq 1$ kul białych i $c \geq 1$ czarnych. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}X$, jeśli X jest liczbą wylosowanych kul białych podczas:
a) losowania bez zwracania n kul ($n \leq b$);
b) losowania bez zwracania tak długo, aż wylosujemy kulę czarną.

9. W urnie znajduje się 50 białych kul. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli, przy czym wyciągniętą kulę malujemy na czerwono, jeśli jest biała. Niech X będzie liczbą czerwonych kul w urnie po 20 losowaniach. Obliczyć $\mathbb{E}X$ i $\mathrm{Var}X$.

10. Każdy bok i każdą przekątną sześciokąta foremnego malujemy losowo na jeden z trzech kolorów. Wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny, a kolorowania różnych odcinków są niezależne. Niech X oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami sześciokąta. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

11. Znajdź minimum funkcji $\phi(t) = \mathbb{E}[(X-t)^2]$ wiedząc, że $\mathbb{E}X^2 < \infty$.

12. Wykaż, że jeżeli $X \geq 0$ i $p > 0$,

$$\mathbb{E}X^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(X \geq t)dt.$$

13. Pokaż, że jeżeli zmienna losowa X ma rozkład dyskretny skoncentrowany na liczbach całkowitych nieujemnych, to

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X \geq k).$$

14. Niech X i Y będą ograniczonymi zmiennymi losowymi (tzn. istnieje M takie, że $\mathbb{P}(|X| < M) = \mathbb{P}(|Y| < M) = 1$) takimi, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $\mathbb{E}X^k = \mathbb{E}Y^k$. Pokaż, że X i Y mają ten sam rozkład. Czy zadanie jest prawdziwe, gdy odrzucimy założenie ograniczoności.

15. Liczby $1, 2, .., n$ ustawiono losowo w ciąg $(a_1, .., a_n)$. Niech N oznacza największą taką liczbę, że $a_k > a_{k-1}$ dla $k \leq N$. Oblicz $\mathbb{E}N$.

16. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_0, X_1, ..$ o tym samym rozkładzie posiadającym ciągłą dystrybuantę. Niech $\eta = \inf\{n : X_n > X_0\}$. Wyznacz rozkład zmiennej η i oblicz $\mathbb{E}\eta$.

17. Zmienne losowe X, Y spełniają warunki: $\mathrm{Var}X = 3$, $\mathrm{Cov(X, Y)} = -1$, $\mathrm{Var}Y = 2$. Oblicz $\mathrm{Var}(4X - 3Y)$ oraz $\mathrm{Cov}(2X - Y, 2X + Y)$.

18. Chcemy zmierzyć jak najdokładniej długość dwóch prętów. Mamy do dyspozycji zwykłą miarkę i możemy jej użyć tylko dwukrotnie. Wiadomo, że błąd pojedynczego pomiaru jest zmienną losową o wartości oczekiwanej 0 i wariancji σ^2, a oba pomiary są niezależne. Rozważmy dwie metody:

a) mierzymy każdy pręt osobno;

b) mierzymy długość sumy i różnicy prętów.

Która z tych metod jest lepsza?