Teoria Prawdopodobieństwa 1
Lista zadań nr 7

1. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_k$ są niezależne o jednakowym rozkładzie równomiernym na zbiorze $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Wyznacz rozkład (dystrybuantę) zmiennej losowej $X = \min_{1 \le i \le k} X_i$. Znajdź rozkład graniczny dla $k \to \infty$ gdy $n/k \to \lambda > 0$. Co to za rozkład?

2. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach z dystrybuantami F_1, F_2 i gęstościami f_1, f_2 odpowiednio. Znajdź

a) dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej $U = X - Y$;
b) dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej $V = XY$;
c) dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej $W = X/Y$ oraz $\mathbf{P}(X \le Y)$.

3. Wyznacz dystrybuantę oraz gęstość zmiennej losowej $Z = XY$, jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach:

a) jednostajnych $U([0,a])$, $U([0,b])$ odpowiednio;
b) wykładniczych $\mathrm{Exp}(\lambda_1)$, $\mathrm{Exp}(\lambda_2)$ odpowiednio;
c) jednostajnym $U([0,a])$, wykładniczym $\mathrm{Exp}(\lambda)$ odpowiednio.

4. Wyznacz dystrybuantę wektora losowego (X, Y) o rozkładzie:

a) jednostajnym na przekątnej kwadratu jednostkowego $[0,1]^2$, łączącej punkty $(0,0)$ i $(1,1)$;
b) jednostajnym na kole jednostkowym $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

W każdym przypadku sprawdź, czy rozkłady łączne są ciągłe, wyznacz rozkłady brzegowe, oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathrm{Var}(X+Y)$ oraz sprawdź czy zmienne losowe X i Y są niezależne.

5. d-wymiarowa zmienna losowa ma rozkład normalny $N(m, A^{-1})$ o gęstości

$$g(x) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle A(x-m), (x-m)\rangle \right].$$

Udowodnij, że $\mathbb{E}X = m$ oraz $\Lambda = A^{-1}$ jest macierzą kowariancji X.

6. d-wymiarowa zmienna losowa na rozkład normalny w $\mathbb{R}^d$, o średniej m i macierzy kowariancji Λ. Niech T będzie przekształceniem afinicznym $\mathbb{R}^d$ na $\mathbb{R}^k$ $(k \le d)$. Pokaż, że TX ma rozkład normalny w $\mathbb{R}^k$. Wyznacz jego średnią i macierz kowariancji.

7. Niech $X_1, .., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0,1)$

a) Oblicz kowariancję $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$, $Z = \sum_{i=1}^n b_i X_i$.
b) Wykaż, że zmienne losowe $\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$ i $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$ są niezależne i obie mają rozkład $N(0,1)$.

8. Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będzie wektorem losowym o standardowym rozkładzie normalnym $N(\mathbf{0}, I)$, gdzie I jest macierzą identyczności. Sprawdź, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$.

9. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą wzajemnie nieskorelowanymi zmiennymi losowymi, takimi, że ich łączny rozkład jest normalny. Wykazać, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne.

10. Podaj przykład nieskorelowanych zmiennych losowych o rokładzie normalnym, które nie są niezależne.

11. (**Transformata Boxa-Müllera**) Pokaż, że jeżeli zmienne losowe X, Y są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$, to

$$U = \sqrt{-2\log X}\cos(2\pi Y) \qquad \text{i} \qquad V = \sqrt{-2\log X}\sin(2\pi Y)$$

są niezależne i mają rozkład $N(0,1)$.

12. Dane są dwa ciągi $\{X_n\}_{n\geq 1}$, $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ zbieżne według prawdopodobieństwa do X, Y, odpowiednio. Pokaż, że

a) $\{X_n + Y_n\}_{n\geq 1}$ zbiega według prawdopodobieństwa do $X + Y$.

b) $\{X_n Y_n\}_{n\geq 1}$ zbiega według prawdopodobieństwa do XY.

13. Niech X będzie zmienną losową taką, że $\mathbb{E}|X| < \infty$. Niech

$$X_n(\omega) = \begin{cases} -n & \text{jeżeli } X(\omega) < -n, \\ X(\omega) & \text{jeżeli } |X(\omega)| \leq n, \\ n & \text{jeżeli } X(\omega) > n. \end{cases}$$

Czy $\{X_n\}_n$ zbiega do X p.n.? A czy zbiega w L^1?

14. Dane są dwa ciągi $\{X_n\}_{n\geq 1}$, $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ zbieżne p.n. do zmiennych X, Y. Pokaż, że jeśli dla każdego n zmienne X_n i Y_n mają ten sam rozkład, to X i Y też mają ten sam rozkład.

15. Dany jest ciąg $\{X_n\}_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych takich, że X_n ma rozkład Poissona z parametrem $1/n$. Czy ten ciąg jest zbieżny wg prawdopodobieństwa, p.n., w L^2, w $L^{3/2}$?

16. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Pokaż, że $\frac{1}{n}\max_{1\leq i\leq n}|X_i|$ zbiega do zera według prawdopodobieństwa.

17. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbb{P}(X_k = k^2) = 1/k^2$, $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - 1/k^2$. Pokaż, że $\sum_{k=1}^n X_k \to -\infty$, p.w. gdy $n \to \infty$.

18. Zmienne losowe $\{X_n\}_{n\geq 1}$ są niezależne i $\mathbb{P}(X_n = \pm 1) = 1/2$. Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^\infty 2^{-n} X_n$ jest zbieżny p.w. i wyznacz jego rozkład graniczny.

19. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, nieujemne i mają ten sam rozkład, różny od δ_0. Pokaż, że $\sum_{n=1}^\infty X_n = \infty$ w prawdopodobieństwem 1.

20. Pokaż, że jeżeli zmienne losowe X_n i X są określone na dyskretnej przestrzeni probabilistycznej, to zbieżność $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa jest równoważna zbieżności p.w.