Teoria Prawdopodobieństwa 1
Lista zadań nr 8

1. Pokaż, że jeśli $0 < p < q$, to

$$(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} \;\le\; (\mathbb{E}|X|^q)^{1/q} \; .$$

2. (*Reguła n sigm*) Pokaż, że jeśli $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$, to

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > n\sigma) \;\le\; \frac{1}{n^2} \; .$$

3*. (Nierównośc Chernoffa) Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0)$ i niech $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pokaż, że dla każdego $\delta > 0$

$$\mathbb{P}(S_n \ge (1+\delta)np) \le \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{np},$$

a jeżeli ponadto $\delta < 1$, to

$$\mathbb{P}(S_n \ge (1+\delta)np) \le e^{-np\delta^2/3}.$$

4*. (Nierównośc Chernoffa) Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0)$ i niech $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pokaż, że dla każdego $\delta \in (0,1)$

$$\mathbb{P}(S_n \le (1-\delta)np) \le \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{np}.$$

oraz

$$\mathbb{P}(S_n \le (1-\delta)np) \le e^{-np\delta^2/3}.$$

5*. Pokaż, że jeżeli X_n jest liczbą orłów w n rzutach monetą, to

$$\mathbb{P}\big(|X_n - n/2| \ge \sqrt{6n\log n}/2\big) \le \frac{2}{n}.$$

6*. Niech U_i, $i = 1, 2, ..$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie: $\mathbb{P}(U_i = 1) = \mathbb{P}(U_i = -1) = 1/2$. Zdefiniujmy $S_n = U_1 + .. + U_n$. Pokaż, że

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\log n}} \le 1 \qquad \text{p.w.}$$

7. Sprawdzić, że następujące zdarzenia należą do $\mathcal{F}_\infty$:
a) $\{$istnieje skończona granica $\lim_{n\to\infty} X_n\}$;
b) $\{\limsup_{n\to\infty} X_n = \infty\}$;
c) $\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \le a\right\}$.

8. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład. Udowodnij, że ciąg średnich

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

jest albo zbieżny p.w. albo rozbieżny z prawdopodobieństwem 1. Pokaż ponadto, że jeżeli ten ciąg jest zbieżny p.w., to jego granica ma rozkład jednopunktowy.

9. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty X_n$, jeśli $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach:
a) $\mathbb{P}(X_n = 2^{-n}) = \mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2$;
b) $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = 1/n$;
c) $\mathbb{P}(X_n = n^{-\alpha}) = \mathbb{P}(X_n = -n^{-\alpha}) = 1/2$ dla $\alpha > 0$;
d) $\mathbb{P}(X_n = a_n) = \mathbb{P}(X_n = -a_n) = 1/2$ dla pewnego ciągu $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

10. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że X_n ma rozkład wykładniczy $\mathrm{Exp}(\lambda_n)$. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^\infty X_n$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ jest zbieżny. Wskazówka: Skorzystaj z tw. Kołmogorowa o trzech szeregach.

11. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że X_n ma rozkład jednostajny $U[-n,n]$. Dla jakich wartości parametru $p > 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^p}$ jest zbieżny p.w.?

12. Niech $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{n^3}, \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n^3}$. Pokaż, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny p.n., chociaż $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) = \infty$.

13. Zmienne $X_1, X_2, ...$ są niezależne i mają ten sam rozkład wykładniczy z parametrem λ

a) Udowodnij, że jeżeli $\lambda < 1$ to $\{X_n < \log n\}$ dla dostatecznie dużych n z prawdopodobieństwem 1.

b) Udowodnij, że jeżeli $\lambda \geq 1$ to $\{X_n \geq \log n\}$ dla nieskończenie wielu n z prawdopodobieństwem 1.

c) Czy ciąg $\{X_n/\log n\}_{n\geq 2}$ jest zbieżny p.w.?

14. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $U[-1,1]$. Czy ciąg $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^i$ jest zbieżny p.w.?