Teoria Prawdopodobieństwa 1
Lista zadań nr 9

1. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = p_n, \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2p_n.$$

Znaleźć warunek konieczny i dostateczny, by ciąg $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełniał MPWL.

2. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach:

$$\mathbb{P}(X_n = n+1) \;=\; \mathbb{P}(X_n = -(n+1)) \;=\; \frac{1}{2(n+1)\log(n+1)}\;, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) \;=\; 1 - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}\;.$$

Pokazać, że ciąg $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia SPWL, a nie spełnia MPWL.

3. Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Obliczyć granice:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{[0,1]^n} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} dx_1 \ldots dx_n$;
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{[0,1]^n} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} dx_1 \ldots dx_n$;
c) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) dx_1 \ldots dx_n$;
d) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n x_i}\right) dx_1 \ldots dx_n$.

4. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Znaleźć

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n X_i}\;,$$

jeśli

a) X_1 ma rozkład jednostajny $U(0,1)$;
b) X_1 ma rozkład o gęstości postaci $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$.

5. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o średniej 0. Czy ze zbieżności $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ wynika zbieżność $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$?

6. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie Poissona $\mathrm{Poi}(\lambda)$. Znaleźć granice:

a) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i X_{i+1}$;
b) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 X_{i+1}$;
c) $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i X_{i+1}}$.

7. (10p) (*Średnia i wariancja empiryczna*) Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) < \infty$. Definiujemy zmienne losowe

$$\overline{X} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \qquad \text{oraz} \qquad S^2 \;=\; \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2\;.$$

Sprawdzić, że $\mathbb{E}\left(\overline{X}\right) = \mathbb{E}X_1$, $\mathbb{E}\left(S^2\right) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)$ oraz pokazać, że $\overline{X} \xrightarrow{\text{p.n.}} \mathbb{E}X_1$, $S^2 \xrightarrow{\text{p.n.}} \mathrm{Var}(X_1)$.

8. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $X_n \sim \mathrm{U}[1/n, 1]$. Pokazać, że ciąg $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ jest zbieżny p.n. i wyznacz jego granicę.

9. Dany jest ciąg $X_1, X_2, \ldots$ niezależnych i nieujemnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Udowodnij, że jeżeli $\mathbb{E}X_1 = \infty$, to

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to \infty \qquad \text{p.w.}$$

10. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie i spełniających $\mathbb{E}[X_1] = 0$ oraz $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Korzystając z lematu Kroneckera pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^{1/2}(\log n)^{1/2+\varepsilon}} \to 0 \qquad \text{p.w.}$$

11. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, jeśli:

a) X_1 ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$;
b) X_1 ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$;
c) X_1 ma rozkład wykładniczy $\mathrm{Exp}(\lambda)$;
d) X_1 ma rozkład gamma $\Gamma(\lambda, \beta)$;
e) X_1 ma rozkład chi-kwadrat $\chi^2(n)$.

Znajdź odpowiednie gęstości w literaturze.

12. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi 0,517. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród n = 10000 noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewcząt?

13. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu, gdy wyrzucimy 200 orłów łącznie. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że rzucimy więcej niż 440 razy?

14. Stwierdzono, iż przeciętnie 30% spośród ogólnej liczby studentów przyjętych na studia kończy je w terminie. Ile osób trzeba przyjąć na pierwszy rok, aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0,9 co najmniej 50 osób skończyło studia w terminie?

15. Gracze A i B rzucają niezależnie monetą (niekoniecznie symetryczną). W pojedynczej kolejce gracz A wygrywa 1 od gracza B z prawdopodobieństwem p lub gracz B wygrywa 1 od gracza A z prawdopodobieństwem $1-p$. Gracze mają kapitały początkowe a i b i grają tak długo, aż jeden z graczy straci cały swój kapitał. Znajdź prawdopodobieństwo q_a ruiny gracza A.

16. Modyfikacja poprzedniego zadania: gracz A ma nieograniczony kapitał i gra toczy się do momentu, w którym zbankrutuje gracz B. Znajdź prawdopodobieństwo wygranej gracza A.