Teoria Prawdopodobieństwa 1
Lista zadań nr 10

1. Pokaż, że jeśli $X, \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ są zmiennymi losowymi oraz $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $X_n \Longrightarrow X$. Podaj przykład, że implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

2. Pokaż, że jeśli $X, \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ są zmiennymi losowymi oraz $X_n \Longrightarrow c \in \mathbb{R}$, to $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

3. Wykaż, że jeśli $X_n \Longrightarrow X$, $a, b \in \mathbb{R}$, to $aX_n + b \Longrightarrow aX + b$.

4. Pokaż, że jeśli $X_n \Longrightarrow X$ oraz $Y_n \Longrightarrow c$, to $X_n + Y_n \Longrightarrow X + c$;

5. Wykaż, że dodatnie zmienne losowe $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbiegają słabo do rozkładu $U[0,1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne losowe $Y_n = -2\log X_n$ zbiegają słabo do rozkładu wykładniczego $\mathrm{Exp}(1/2)$.

6. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym $U[0,1]$. Niech $Y_n = n\min_{1\le i\le n} X_i$. Pokaż, że Y_n zbiega słabo do rozkładu wykładniczego $\mathrm{Exp}(1)$.

7. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Niech $Y_n = n\min_{1\le i\le n} |X_i|$. Pokazać, że Y_n zbiega słabo do rozkładu wykładniczego. Z jakim parametrem?

8. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że X_n ma rozkład wykładniczy $\mathrm{Exp}(\frac{n}{n+1})$. Pokazać, że ciąg X_n zbiega słabo do rozkładu $\mathrm{Exp}(1)$.

9. Dany jest ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny wg rozkładu do zmiennej losowej X. Pokazać, że $\sin(X_n)$ zbiega wg rozkładu do $\sin(X)$.

10. Czy zmienne losowe posiadające gęstość mogą słabo zbiegać do rozkładu dyskretnego? Czy zmienne losowe o rozkładach dyskretnych mogą słabo zbiegać do rozkładu posiadającego gęstość?

11. Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajmym na zbiorze $\{1, 2, \ldots, N\}$. Oznaczmy przez $T_N = \min\{n : \quad X_n = X_m \text{ dla pewnego } m < n\}$. Oblicz granicę według rozkładu ciągu $T_N/\sqrt{N}$, gdy $N \to \infty$. Wykorzystaj otrzymany wynik do rozwiązania problemu urodzin: oblicz prawdopodobieństwo, że gronie 23 osób są dwie mające urodziny tego samego dnia.

12. Oblicz funkcje charakterystyczne rozkładów: a) $\mathrm{Bin}(n,p)$, b) $\mathrm{Exp}(\lambda)$, c) $\mathrm{Poi}(\lambda)$, d) $\Gamma(\lambda,\beta)$.

13. Zbadaj, czy następujące funkcje są funkcjami charakterystycznymi i jeśli tak, wyznacz odpowiedni rozkład: a) $\cos t$; b) $\cos^2 t$; c) $\frac{1}{4}\left(1+e^{it}\right)^2$; d) $\frac{1+\cos t}{2}$; c) $\frac{1}{2-e^{it}}$.

14. Wiadomo, że φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X o rozkładzie μ. Sprawdzić, czy funkcjami charakterystycznymi są: a) φ^2; b) $\Re(\varphi)$; c) $|\varphi|^2$; d) $|\varphi|$.

15. Przy pomocy funkcji charakterystycznych rozwiąż zadania 2 i 3 z listy 6.

16. Udowodnij twierdzenie Poissona (zadanie 6 z listy 5) przy pomocy funkcji charakterystycznych.

17. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $U[0,1]$, a Y niezależną od X zmienną losową o rozkładzie równomiernym na zbiorze $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Przy użyciu funkcji charakterystycznych, znaleźć rozkład zmiennej losowej $X + Y$.

18. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład. Wiedząc, że $\sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład $N(0,1)$, wyznacz rozkład zmiennych X_i.

19. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $U[-1,1]$. Czy istnieje niezależna od niej zmienna losowa Y taka, że rozkłady zmiennych $X+Y$ i $Y/2$ są takie same?