Teoria Prawdopodobieństwa 1
Lista zadań nr 11

1. Sumujemy 10000 liczb, każdą zaokrągloną z dokładnością do 10^{-m}. Przypuśćmy, że błędy spowodowane przez zaokrąglenia są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $\mathrm{U}[-10^{-m}/2, 10^{-m}/2]$. Znaleźć możliwie krótki przedział, do którego z prawdopodobieństwem co najmniej 0.95 będzie należał błąd całkowity.

2. Na campusie uniwersyteckim są dwie restauracje, po 120 miejsc każda. Wiadomo, ze codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad, a wyboru restauracji dokonują losowo z jednakowym prawdopodobieństwem. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że w którejś restauracji zabraknie miejsc. Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze niż 0.0001?

3. Na podstawie losowej próby szacujemy procent chorych na rzadką chorobę. Wiadomo na pewno, że liczba chorych nie przekracza 0.5% populacji, a błąd ma być mniejszy od 0.001 z prawdopodobieństwem 0.95. Ile osób musi liczyć próba?

4. Na podstawie losowej próby szacujemy procent dorosłych osób popierających pewną partię polityczną. Chcemy by błąd był mniejszy niż 1% z prawdopodobieństwem 0.95. Ile w tym celu musimy przepytać osób? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli wiemy, ze partię popiera nie więcej niż 10% wyborców?

5. Czas obsługi pojedynczego klienta w kasie ma rozkład wykładniczy ze średnią 4 minuty. Zakładamy, że klienci są obsługiwani w sposób niezależny. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że w ciągu 6 godzin uda się obsłużyć w kasie co najmniej 100 klientów.

6. Ilość dziennych wyświetleń pewnej strony internetowej ma rozkład Poissona ze średnią 300 wyświetleń. Zakładamy, że wywołania strony w kolejnych dniach są niezależne. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że w listopadzie strona zostanie wyświetlona co najwyżej 8800 razy.

7. Dany jest ciąg $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad \mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n^2} .$$

Udowodnić, że nie jest spełniony warunek Lindeberga, ale mimo to ciąg $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}}$ słabo zbiega do rozkładu $\mathrm{N}(0,1)$.

8. Pokazać, że podane rozkłady są *asymptotycznie normalne*, tzn.

$$\frac{X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1) ,$$

jeśli:
a) X_n ma rozkład dwumianowy $\mathrm{B}(n,p)$ oraz $a_n = np$ i $b_n = \sqrt{np(1-p)}$;
b) X_n ma rozkład Poissona $\mathrm{Poi}(n)$ oraz $a_n = n$ i $b_n = \sqrt{n}$;
c) X_n ma rozkład gamma $\Gamma(1,n)$ oraz $a_n = n$ i $b_n = \sqrt{n}$;
d) X_n ma rozkład chi-kwadrat $\chi^2(n)$ oraz $a_n = n$ i $b_n = \sqrt{2n}$;
e) X_n ma rozkład studenta $t(n)$ oraz $a_n = 0$ i $b_n = 1$.

Wskazówka: Zbadać zbieżność funkcji charakterystycznych lub znaleźć przedstawienie $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, gdzie $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie i skorzystać z CTG.

9. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}X_1 = 0$ oraz $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Pokazać, że:
a)

$$U_n = \frac{\sqrt{n}\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1) ;$$

b)

$$V_n \;=\; \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \;\xrightarrow{d}\; \mathrm{N}(0,1)\;.$$

10. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie dwupunktowym: $\mathbb{P}(X_1 = a) = \mathbb{P}(X_1 = 1/a) = 1/2$, przy czym $a > 1$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu zmiennych losowych $Y_n = (\Pi_{i=1}^n X_i)^{1/\sqrt{n}}$.

11. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie Poissona $\mathrm{Poi}(\lambda)$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$U_n \;=\; \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 - (n\lambda)^2}{n\sqrt{n}}\;.$$

12. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ i $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ będą ciągami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym $\mathrm{U}[-1,1]$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$V_n \;=\; \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Y_i^2}}\;.$$

13. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie dwupunktowym: $\mathbb{P}(X_1 = \epsilon) = \mathbb{P}(X_1 = -\epsilon) = 1/2$. Niech N będzie (niezależną od ciągu $\{X_n\}_{n=1}^\infty$) zmienną losową o rozkładzie Poissona $\mathrm{Poi}(\epsilon^{-2})$. Pokazać, że

$$\sum_{i=1}^N X_i \;\xrightarrow{d}\; \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{gdy} \quad \epsilon \to 0^+\;.$$

14. Zmienne losowe $X_1, X_2, ...$ są niezależne, przy czym

$$\mathbb{P}(X_k = k) = \mathbb{P}(X_k = -k) = 1/2.$$

Niech $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var} X_k$. Czy ciąg zmiennych losowych

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{s_n}$$

jest zbieżny według rozkładu, a jeśli tak, to do jakiej granicy?