Geometric and Asymptotic Group Theory

Damian Osajda
damian.osajda@univie.ac.at
http://www.mat.univie.ac.at/∼dosaj/GGTWien/Course.html
Dienstag, 11:00–12:00, Raum 2A310 UZA2

Blatt 1

Free groups

(1) A *free group over a set* A is a group G containing A with the following property. For every map $\varphi\colon A \to H$ to a group H, there exists its unique extension $\overline{\varphi}\colon G \to H$.

Show that for a given set A all free groups over A are isomorphic.

Eine *freie Gruppe über einer Teilmenge* A ist eine Gruppe G, die A enthält die folgende Eigenschaft hat. Für jede Abbildung $\varphi\colon A \to H$ in eine Gruppe H gibt es eine eindeutige Erweiterung $\overline{\varphi}\colon G \to H$.

Zeige, dass für eine gegebene Menge A alle freien Gruppen über A isomorph sind.

(2) Show that a free group over a given set A exists.

Hint: Consider a set G^* of *words*, i.e. of finite sequences of elements of the set $A \cup A^{-1}$, where A^{-1} consists of "formal inverses" of elements of A. Define a "reduction" of subwords of the form aa^{-1}. Show that G^* modulo this reduction gives the required group.

Zeige, dass eine freie Gruppe über A existiert.

Hinweis: Betrachte eine Menge G^* von *Wörtern*. D.h., das ist eine Menge von endlichen Folgen von Elementen von $A \cup A^{-1}$, wobei A^{-1} die Menge der "formalen Inversen" der Elemente aus A ist. Definiere eine "Reduktion" von Teilwörtern der Form aa^{-1}. Zeige, dass G^* modulo dieser Reduktion die gesuchte Gruppe liefert.

(3) Solve all the problems above replacing "free group" by "abelian free group" everywhere (and replacing "group H" by "abelian group H" in the definition).

Ersetze bei allen obigen Aufgaben "freie Gruppe" durch "abelsche freie Gruppe" (und "Gruppe H" durch "abelsche Gruppe H" in der Definition) und löse die Probleme noch einmal.

(4) Show that the fundamental group of a graph is free.

Hint: Consider a maximal subtree T of a graph Γ. The fundamental group of Γ is a free group over the set of edges in $\Gamma - T$.

Zeige, dass die Fundementalgruppe eines Graphen frei ist.

Hinweis: Betrachte einen Spannbaum T in Γ. Die Fundamentalgruppe von Γ ist frei über der Menge von Kanten in $\Gamma - T$.

(5) Show that a subgroup of a free group is free.

Hint: Use Exercise (4).

Zeige, dass eine Untergruppe von einer freie Gruppe frei ist.

Hinweis: Benutze Aufgabe (4).