Geometric and Asymptotic Group Theory

Damian Osajda
damian.osajda@univie.ac.at
http://www.mat.univie.ac.at/∼dosaj/GGTWien/Course.html
Dienstag, 11:00–12:00, Raum 2A310 UZA2

Blatt 2
Cayley graphs

(1) Draw all the Cayley graphs of the cyclic group C_5 of order 5. Draw a few Cayley graphs of $\mathbb{Z}$ (integers with addition) and a few Cayley graphs of $\mathbb{F}_2$ (the free group of rank 2).

Zeichne alle Cayleygraphen der zyklischen Gruppe C_5 der Ordnung 5. Zeichne ein paar Cayleygraphen von $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen mit Addition) und ein paar Cayleygraphen von $\mathbb{F}_2$, der freien Gruppe mit Rang 2.

(2) Draw a Cayley graph Γ of $\mathbb{Z}$ and a Cayley graph Δ of $\mathbb{Z}^2$ having the following property. Combinatorial balls of radius 7 in Γ and Δ are isomorphic.

Zeichne einen Cayleygraphen Γ von $\mathbb{Z}$ und einen Cayleygraphen Δ von $\mathbb{Z}^2$ mit der folgenden Eigenschaft: Kombinatorische Kugeln mit Radius 7 in Γ und Δ sind isomorph.

(3) Does every Cayley graph have to be edge-transitive?

Ist jeder Cayleygraph kantentransitiv?

(4) Prove the Sabidussi Theorem: A graph Γ is a Cayley graph of a group G iff it admits a free transitive action of G by graph automorphisms.

Zeige den Satz von Sabidussi: Ein Graph Γ ist ein Cayleygraph einer Gruppe G genau dann, wenn er eine auf den Knoten freie und transitive Wirkung von G durch Automorphismen des Graphen zulässt.

(5) Why is the Petersen graph not a Cayley graph?

Hint: Consider elements of order two in the group.

Warum ist der Petersengraph kein Cayleygraph?

Hinweis: Betrachte Gruppenelemente der Ordnung 2.

(6) How to distinguish Cayley graphs of $\mathbb{Z}$ from the ones of $\mathbb{Z}^2$ and $\mathbb{F}_2$?

Hint: Look at the graphs "from far away", i.e. consider asymptotic (or coarse, or large-scale geometry) properties of the graphs.

Wie kann man Cayleygraphen von $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ und $\mathbb{F}_2$ unterscheiden?

Hinweis: Betrachte die Graphen aus "weiter Entfernung". D.h., betrachte asymptotische bzw. "groß strukturele" Eigenschaften der Graphen.

(7) Using Cayley graphs show how to embed $\mathbb{F}_3$ into $\mathbb{F}_2$.

Hint: Map a tree of a higher valence into a tree of the lower one.

Verwende Cayleygraphen um zu zeigen wie man $\mathbb{F}_3$ in $\mathbb{F}_2$ einbetten kann.

Hinweis: Bilde einen Baum mit höherem Eckengrad in einen Baum mit niedrigerem Eckengrad ab.

(8) *Examples of groups.* Draw Cayley graphs of the following groups.
 (a) Baumslag-Solitar group $BS(2,1) = \langle a, b \mid ba^2b^{-1} = a \rangle$.
 (b) Heisenberg group $H_3(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (c) The fundamental group of the surface of genus 2.
 (d) Right-angled Coxeter group $\langle a, b, c, d \mid a^2, b^2, c^2, d^2, [a, b], [c, d] \rangle$.
 (e) Right-angled Artin group $\langle a, b, c, d \mid [a, b], [c, d] \rangle$.

Beispiele von Gruppen. Zeichne Cayleygraphen der folgenden Gruppen.
 (a) Baumslag-Solitar-Gruppe $BS(2,1) = \langle a, b \mid ba^2b^{-1} = a \rangle$.
 (b) Heisenberggruppe $H_3(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$.
 (c) Die Fundamentalgruppe der Fläche mit Geschlecht 2.
 (d) Rechtwinkelige Coxetergruppe $\langle a, b, c, d \mid a^2, b^2, c^2, d^2, [a, b], [c, d] \rangle$.
 (e) Rechtwinkelige Artin-gruppe $\langle a, b, c, d \mid [a, b], [c, d] \rangle$.

(9) Draw Cayley complexes of groups from the previous exercises.

Zeichne Cayleykomplexe der Gruppen aus den vorherigen Beispielen.