

Podstawy geometrii i geometria nieeuklidesowa

Damian Osajda

Aksjomaty płaszczyzny euklidesowej wg Dawida Hilberta (1899)

Aksjomaty incydencji

- (I1) Dla dowolnych dwóch różnych punktów istnieje dokładnie jedna prosta przez nie przechodząca.
- (I2) Na każdej prostej leżą dwa punkty.
- (I3) Istnieją trzy punkty niewspółliniowe.

Aksjomaty porządku

- (O1) Dla punktów dowolnej prostej p relacja $<_p$ jest liniowym porządkiem, tzn.:
 - (a) jeśli $A <_p B$ to $A \neq B$;
 - (b) jeśli $A \neq B$ to zachodzi dokładnie jedna z relacji $A <_p B$, $B <_p A$;
 - (c) jeśli $A <_p B$ i $B <_p C$ to $A <_p C$.
- (O2) (*Aksjomat Moritza Pascha.*) Dla dowolnych niewspółliniowych punktów A, B, C oraz dowolnej prostej p nie przechodzącej przez żaden z tych punktów, jeśli p przecina odcinek AB to przecina też dokładnie jeden spośród odcinków BC i AC .

Aksjomaty miary odcinków

- (M1) Miara każdego odcinka jest liczbą dodatnią.
- (M2) Dla każdej półprostej r o początku w A i dla dowolnej liczby dodatniej d istnieje punkt $B \in r$ taki, że $m(AB) = d$.
- (M3) Jeśli $A <_p B <_p C$ to $m(AB) + m(BC) = m(AC)$.

Aksjomaty miary kątów

- (K1) Dla każdego kąta rs (utworzonego z półprostych r i s o wspólnym początku) miara $\mu(rs)$ jest liczbą z otwartego przedziału $(0, \pi)$.
- (K2) Dla dowolnej prostej p , dowolnej półpłaszczyzny W ograniczonej przez p , dowolnej półprostej r zawartej w p i dowolnej liczby $\alpha \in (0, \pi)$, istnieje półprosta s zawarta w W tworząca wraz z r kąt rs taki, że $\mu(rs) = \alpha$.

- (K3) Niech r, s, t będą półprostymi o wspólnym początku takimi, że s leży wewnątrz kąta rt . Wtedy $\mu(rs) + \mu(st) = \mu(rt)$.
- (K4) Niech A, B, C i A', B', C' będą dwoma trójkami niewspółliniowych punktów. Jeśli $m(AB) = m(A'B')$, $m(AC) = m(A'C')$ i $\mu(BAC) = \mu(B'A'C')$ to $\mu(ABC) = \mu(A'B'C')$.

Aksjomat równoległości

- (R) Jeśli punkt A nie leży na prostej p , to istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez A i nie przecinająca p .