

# Podstawy geometrii i geometria nieeuklidesowa

Damian Osajda

## Lista zadań nr 2

[http://www.math.uni.wroc.pl/~dosaj/Wroc/Teaching/2017\\_Geomel/2017\\_Geomel.html](http://www.math.uni.wroc.pl/~dosaj/Wroc/Teaching/2017_Geomel/2017_Geomel.html)

**Zad. 1.** Zinterpretuj punkty 1-4 z Zad. 2 z Listy nr 1 w kontekście Teorii Incydencji i rozwiąż je.

**Zad. 2.** Czy z aksjomatów Teorii Incydencji z Aksjomatem Równoległości wynika, że:

1. na każdej prostej leżą przynajmniej 3 punkty;
2. płaszczyzna składa się z przynajmniej 4 punktów;
3. na płaszczyźnie znajduje się przynajmniej 6 prostych;
4. przez każdy punkt przechodzą przynajmniej 3 proste;
5. dla każdej prostej istnieją przynajmniej dwie proste, które jej nie przecinają?

Które z powyższych stwierdzeń są niezależne od Teorii Incydencji z Aksjomatem Równoległości?

**Zad. 3.** Czy Teoria Incydencji z Aksjomatem Równoległości jest niesprzeczna? A czy jest zupełna?

*W zadaniach 4–9 można korzystać wyłącznie z aksjomatów Teorii Incydencji z Aksjomatem Równoległości, oraz z poprzednich zadań lub podpunktów.*

**Zad. 4.** Proste  $p_1, p_2$  nazywamy *równoległymi* jeśli jest to ta sama prosta lub jeśli są to różne proste i nie mają punktów wspólnych. Uzasadnij, że:

1. relacja równoległości jest przechodnia;
2. jeśli  $p \neq q$  i  $p$  przecina  $q$ , to każda prosta równoległa do  $p$  przecina  $q$  w dokładnie jednym punkcie, zaś przez każdy punkt prostej  $q$  przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do  $p$ .

**Zad. 5.** *Kierunkiem* nazywamy zbiór wszystkich prostych równoległych do pewnej prostej. Uzasadnij, że

1. przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna prosta o danym kierunku;
2. istnieją conajmniej 3 różne kierunki;

3. różne kierunki są rozłączne jako zbiory prostych;
4. ilość prostych w poszczególnych kierunkach jest taka sama (przy założeniu że jest skończona);
5. na prostych o danym kierunku leży taka sama ilość punktów.

**Zad. 6.** Jeśli  $p$  i  $q$  są różnymi prostymi, to istnieje prosta  $r$  przecinająca każdą z prostych  $p$  i  $q$  w dokładnie jednym punkcie.

**Zad. 7.** Uzasadnij, że na każdych dwóch prostych leży taka sama ilość punktów.

**Zad. 8.** *Pękiem* nazywamy zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt. Uzasadnij, że każde dwa pęki są równoliczne.

**Zad. 9.** Uzasadnij, że liczba prostych w każdym pęku jest o jeden większa niż liczba punktów na dowolnej prostej.

**Zad. 10.** Które stwierdzenia z zadań 4–9 są prawdziwe w Teorii Incydencji (bez Aksjomatu Równoległości)?