

Podstawy geometrii i geometria nieeuklidesowa

Damian Osajda

Lista zadań nr 4

http://www.math.uni.wroc.pl/~dosaj/Wroc/Teaching/2017_Geomel/2017_Geomel.html

Płaszczyzna euklidesowa

Zad. 1. Pokaż, że dla każdego punktu A na prostej p , istnieją dokładnie dwie półproste w p o początku w A .

Zad. 2. Pokaż, że dla każdej prostej istnieją dokładnie dwie półpłaszczyzny ograniczone przez nią.

Zad. 3. Pokaż, że punkt na półprostej, o którym mowa w aksjomacie (M2) jest jedyny.

Zad. 4. Jeśli półprosta s leży wewnątrz kąta rt (zgodnie z definicją podaną na wykładzie), to s nie leży na żadnej z prostych wyznaczających r i t .

Zad. 5. (*Leżenie wewnątrz kąta.*) Niech rt będzie kątem, a $\bar{r}, \bar{t}$ dwiema prostymi definiującymi półproste r, t , odpowiednio.

1. Pokaż, że półprosta r jest zawarta w jednej z półpłaszczyzn ograniczonych przez $\bar{t}$. Taką półpłaszczyznę nazywamy *półpłaszczyzną noszącą* kąt rt .
2. Punkt *leży wewnątrz* kąta rt jeśli nie leży na r ani na t i należy do dwóch półpłaszczyzn noszących rt . Półprosta s o początku wspólnym z r, t i różna od nich *leży wewnątrz* kąta rt jeśli zawiera punkt różny od początku leżący wewnątrz kąta rt . Pokaż, że wtedy każdy punkt w s poza początkiem leży wewnątrz rt .
3. Pokaż, że taka definicja “leżenia wewnątrz” kąta jest zgodna z definicją podaną na wykładzie.

Zad. 6. Pokaż, że półprosta, o której mowa w aksjomacie (K2) jest jedyna.

Zad. 7. Niech r, s, t będą półprostymi o wspólnym początku O takimi, że rt tworzą kąt. Niech $A, A' \in r$ oraz $C \in t$ będą punktami różnymi od O . Pokaż, że jeśli s przecina odcinek AC , to przecina też odcinek $A'C$.

Zadania 8–11 dotyczą modelu arytmetycznego Hilberta płaszczyzny euklidesowej.

Zad. 8. Pokaż, że półprosta ma formę $\{(x + Bt, y - At) \mid t \in [0, +\infty)\}$, dla pewnych liczb x, y, A, B takich, że $(A, B) \neq (0, 0)$.

Zad. 9. Pokaż, że półpłaszczyzna ma formę $\{(x, y) \mid Ax + By + C \geq 0\}$, dla pewnych liczb A, B, C takich, że $(A, B) \neq (0, 0)$.

Zad. 10. Pokaż, że miara kąta jest dobrze zdefiniowana.

Wskazówka: Pokaż, że wyrażenie

$$\arccos \frac{(x_1 - (x_1 + Bt))(y_1 - (y_1 + B's)) + (x_2 - (x_2 - At))(y_2 - (y_2 - A's))}{\sqrt{(x_1 - (x_1 + Bt))^2 + (x_2 - (x_2 - At))^2} \sqrt{(y_1 - (y_1 + B's))^2 + (y_2 - (y_2 - A's))^2}}$$

nie zależy od t, s .

Zad. 11.* Udowodnij, że model arytmetyczny D. Hilberta spełnia aksjomaty płaszczyzny euklidesowej.