

Podstawy geometrii i geometria nieeuklidesowa

Damian Osajda

Lista zadań nr 6

http://www.math.uni.wroc.pl/~dosaj/Wroc/Teaching/2017_Geomel/2017_Geomel.html

Płaszczyzna nieeuklidesowa

Wszystkie zadania dotyczą modelu Kleina płaszczyzny nieeuklidesowej.

Zad. 1. Pokaż, że miara kąta między prostymi może różnić się od euklidesowej miary kąta między odpowiadającymi im cięciwami.

Zad. 2. Pokaż, że dla każdej prostej istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między punktami leżącymi na tej prostej a liczbami rzeczywistymi, zadana przez współrzędne hiperboliczne.

Zad. 3. Pokaż, że współrzędne hiperboliczne są zgodne z porządkiem, tj., że dla każdych dwóch punktów $A \neq B$ na prostej p mamy $A <_p B \iff x_A < x_B$.

Zad. 4. Uzasadnij istnienie/nieistnienie wspólnej prostopadłej dla prostych rozbieżnych/asymptotycznych w przypadkach „ze średnicami”.

Zad. 5. Pokaż, że dla każdego $n \geq 5$ istnieje n -kąt o wszystkich kątach prostych.

Zad. 6. Uzasadnij, że współrzędna logarytmiczna

$$x_A = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{|PA|_{\mathbb{E}^2}}{|AQ|_{\mathbb{E}^2}} \right|$$

punktu A na cięciwie PQ :

1. wynosi 0 gdy A jest euklidesowym środkiem cięciwy PQ ;
2. rośnie gdy punkt A oddala się od punktu P zaś zbliża do Q ;
3. zmienia się na przeciwną, gdy zamieni się oznaczenia P i Q dla końców cięciwy.

Zad. 7. Punkt A leży w środku modelu Kleina będącego kołem o promieniu 1, zaś punkt B leży w euklidesowej odległości $\frac{1}{2}$ od A . Oblicz miarę $m(AB)$ odcinka AB oraz znajdź nieeuklidesowy środek odcinka AB .

Zad. 8. Czworokąt *Saccheri'ego* to czworokąt $ABCD$ taki, że $\mu(A) = \mu(B) = \frac{\pi}{2}$ i $m(AD) = m(BC)$. Znajdź przykład czworokąta *Saccheri'ego* i sprawdź, że jego kąty C i D są ostre.

Zad. 9. Uzasadnij, że przeciwprostokątna w trójkącie prostokątnym nieeuklidesowym ma większą miarę niż przyprostokątna, w następujących dwóch krokach.

1. Najpierw rozważ takie położenie trójkąta w modelu, w którym wierzchołek między przeciwprostokątną a rozpatrywaną przyprostokątną znajduje się w euklidesowym środku modelu.
2. Następnie, korzystając z poprzedniego punktu oraz z twierdzeń o przystawianiu trójkątów, uzasadnij powyższą własność dla dowolnego nieeuklidesowego trójkąta prostokątnego.

Zad. 10. Korzystając z poprzedniego zadania uzasadnij, że rzut prostokątny punktu A na daną prostą jest punktem najbliższym punktowi A spośród punktów na tej prostej.

Zad. 11. Proste p i q są asymptotyczne, $A \in q$, zaś A' jest rzutem prostokątnym A na p . Uzasadnij, że miara $m(AA')$ dąży do zera gdy A dąży do wspólnego punktu prostych p i q na brzegu modelu. Przyjmij, że p jest średnicą modelu.

Zad. 12. Uzasadnij, że odcinki o wspólnym końcu w środku modelu mają jednakowe miary (nieeuklidesowe) dokładnie wtedy, gdy ich zwykle (euklidesowe) długości są równe. Wywnioskuj stąd, że okręgami o środku w środku modelu są zwykle okręgi.

Zad. 13. Korzystając z poprzedniego zadania podaj przykład okręgu, na którym nie można opisać trójkąta. Oblicz jaki jest co najmniej jego promień. Zrób to samo dla czworokąta, pięciokąta, itd.

Zad. 14. Dla okręgów o środku w środku modelu uzasadnij, że kąt wpisany oparty na średnicy nie jest kątem prostym. Czy jest to kąt ostry czy rozwarty?