

Topologia algebraiczna 1

Damian Osajda

Lista ćwiczeń nr 1

http://www.math.uni.wroc.pl/~dosaj/Wroc/Teaching/2018_TopAlg/2017_TopAlg.html

Grupa wolna i produkt wolny grup

Ćw. 1. (*Grupa wolna*) Niech S będzie zbiorem. *Grupą wolną nad S* , oznaczaną $F(S)$, nazywamy zbiór wszystkich skończonych ciągów – słów zredukowanych – $s_1 s_2 \dots s_n$ takich, że s_i jest elementem S lub elementem zbioru *formalnych odwrotności* elementów S , czyli $S^{-1} := \{s^{-1} \mid s \in S\}$, i $s_i \neq s_{i\pm 1}^{-1}$.

1. Zdefiniuj mnożenie elementów (*wsk.: redukcja konkatencji*).
2. Jaki jest element neutralny, odwrotny do danego?
3. Pokaż, że mnożenie jest łączne i wywnioskuj, że tak zdefiniowany obiekt jest grupą.

Ćw. 2. (*Uniwersalność grupy wolnej*) Pokaż następującą *własność uniwersalną* grupy wolnej $F(S)$. Dla każdego odwzorowania $\varphi: S \rightarrow G$ w grupę G istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi: F(S) \rightarrow G$ *rozszerzający* φ , czyli taki, że $\psi \circ i = \varphi$, gdzie $i: S \rightarrow F(S)$ jest naturalnym włożeniem. Innymi słowy, istnieje dokładnie jedno ψ takie, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & F(S) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \psi \\ & & G \end{array}$$

Ćw. 3. Pokaż, że powyższa własność uniwersalna definiuje jednoznacznie grupę $F(S)$.

Ćw. 4. (*Lemat o Ping-Pongu*) Dowiedz następującego *Lematu o Ping-Pongu*. Niech G będzie grupą działającą na zbiorze X . Załóżmy, że istnieją rozłączne niepuste zbiory $A^+, A^-, B^+, B^- \subset X$, i dwa elementy $a, b \in G$ o następujących własnościach:

- a) $A^+ \cup A^- \cup B^+ \cup B^- \subsetneq X$;
- b) $a(X - A^-) \subseteq A^+, a^{-1}(X - A^+) \subseteq A^-$;
- b) $b(X - B^-) \subseteq B^+, b^{-1}(X - B^+) \subseteq B^-$.

Wtedy $\langle a, b \rangle < G$ jest grupą wolną nad $\{a, b\}$.

Ćw. 5. (*Produkt wolny dwóch grup*) Niech G, H będą grupami. *Produkt wolny* $G * H$ grup G i H składa się ze wszystkich skończonych zredukowanych słów $g_1 g_2 \dots g_n$ takich, że $g_i \in G \cup H$ i jeśli $g_i \in G$ to $g_{i\pm 1} \in H$.

1. Zdefiniuj mnożenie elementów.
2. Jaki jest element neutralny, odwrotny do danego?
3. Pokaż, że mnożenie jest łączne:
 - (a) zdefiniuj działanie G (lub H) na zbiorze słów zredukowanych zadane przez mnożenie z “lewej strony”;
 - (b) pokaż, że jest to działanie grupy;
 - (c) rozszerz to działanie na wszystkie zredukowane słowa i wywnioskuj łączność mnożenia w $G * H$;
 - (d) wywnioskuj, że tak zdefiniowany obiekt jest grupą.

Ćw. 6. (*Produkt wolny grup*) Rozszerz definicję produktu wolnego dwóch grup do dowolnej rodziny grup.

Ćw. 7. (*Uniwersalność produktu wolnego grup*) Pokaż następującą własność uniwersalną produktu wolnego grup $*_{\alpha} G_{\alpha}$. Dla każdej rodziny homomorfizmów $\{\varphi_{\alpha}: G_{\alpha} \rightarrow H\}_{\alpha}$ w grupę H istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi: *_{\alpha} G_{\alpha} \rightarrow H$ rozszerzający wszystkie φ_{α} , to znaczy taki, że następujący diagram jest przemienny, dla każdego α :

$$\begin{array}{ccc}
 G_{\alpha} & \xrightarrow{i_{\alpha}} & *_{\alpha} G_{\alpha} \\
 & \searrow \varphi_{\alpha} & \downarrow \psi \\
 & & H
 \end{array}$$

gdzie i_{α} jest naturalnym włożeniem.

Ćw. 8. Pokaż, że powyższa własność uniwersalna definiuje jednoznacznie grupę $*_{\alpha} G_{\alpha}$.