

Topologia algebraiczna 1

Damian Osajda

Lista ćwiczeń nr 2

http://www.math.uni.wroc.pl/~dosaj/Wroc/Teaching/2018_TopAlg/2017_TopAlg.html

Homotopie i CW kompleksy

Ćw. 1. Pokaż, że relacja homotopijnej równoważności (HE) jest relacją równoważności.

Ćw. 2. Opisz wzorami retrakcje deformacyjne:

1. płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ na punkt;
2. płaszczyzny bez punktu $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ na okrąg;
3. $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ na sferę;
4. $D^n \times I$ na $D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I$.

Ćw. 3. Znajdź strukturę CW kompleksu dla:

1. powierzchni z n dziurami, tj. powierzchni genusu n ;
2. płaszczyzny rzutowej $\mathbb{RP}^2$, tj. przestrzeni prostych przez $(0, 0, 0)$ w $\mathbb{R}^3$, z naturalną topologią;
3. n -wymiarowej przestrzeni rzutowej $\mathbb{RP}^n$, tj. przestrzeni prostych przez $(0, \dots, 0)$ w $\mathbb{R}^{n+1}$, z naturalną topologią;
4. torusa n -wymiarowego $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ (produkt n kopii);
5. sfery $\mathbb{S}^n$, takiego, że sfery $\mathbb{S}^k$ są podkompleksami, dla $k < n$;
6. (korzystając z poprzedniego punktu) sfery nieskończenie wymiarowej $\mathbb{S}^\infty$ zdefiniowanej jako suma wstępująca $\bigcup_{n=0}^\infty \mathbb{S}^n$.

Ćw. 4. Uzasadnij, że dowolna powierzchnia z usuniętym punktem retrahuje się deformacyjnie do przestrzeni homeomorficznej z grafem, tj. jednowymiarowym CW kompleksem. Znajdź “najprostsze” takie grafy dla poszczególnych powierzchni.

Ćw. 5. Pokaż, że produkt dwóch skończonych CW kompleksów jest CW kompleksem.

Ćw. 6. Pokaż, że $\mathbb{S}^\infty$ jest ściągalna.

Ćw. 7. Niech $I^n \setminus \{x\}$ będzie domkniętą kostką n -wymiarową z usuniętym jednym punktem. Czy taka przestrzeń może być ściągalna? A co z $I^\infty \setminus \{x\}$?