

Topologia algebraiczna 1

Damian Osajda

Lista ćwiczeń nr 5

http://www.math.uni.wroc.pl/~dosaj/Wroc/Teaching/2018_TopAlg/2017_TopAlg.html

Twierdzenie Seiferta-Van Kampena

Ćw. 1. Uzupełnij detale w przedstawionym dowodzie Twierdzenia Seiferta-Van Kampena:

1. Pokaż, że wystarczy dowieść, iż każde dwie faktoryzacje danego elementu $\pi_1(X)$ są równoważne.
2. Pokaż, że różne wybory ścieżek g_v prowadzą do równoważnych faktoryzacji.
3. Pokaż, że „elementarna homotopia przez jeden prostokąt z podziału” prowadzi do równoważnej faktoryzacji.
4. Pokaż, że faktoryzacje „na denkach” są równoważne z wyjściowymi.

Ćw. 2. Uzasadnij dlaczego założenie o ścieżkowej spójności potrójnych przecięć w sformułowaniu twierdzenia Seiferta-Van Kampena jest istotne.

Ćw. 3. Używając Twierdzenia Seiferta-Van Kampena wyznacz grupy podstawowe:

1. sfer S^n dla $n \geq 2$;
2. powierzchni orientowalnej genusu (rodzaju) g (tj. „z g dziurami”);
3. rzeczywistej płaszczyzny rzutowej;
4. butelki Kleina.

Ćw. 4. Znajdź dwuwymiarowy CW-kompleks, którego grupą podstawową jest:

1. $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;
2. grupa *Baumslag-Solitar* $B(m, n) = \langle a, b \mid ab^m a^{-1} = b^n \rangle$.

Ćw. 5. Niech X, Y będą skończonymi spójnymi CW-kompleksami. Pokaż, że $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$.

Ćw. 6. (*Linki w $\mathbb{R}^3$.*) Niech $A = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y, 0) \mid (x - 3)^2 + y^2 = 1\}$ i $C = \{(0, y, z) \mid (y - 1)^2 + z^2 = 1\}$. Pokaż, że:

1. (*węzeł trywialny*) $\mathbb{R}^3 \setminus A$ retrahuje się deformacyjnie na bukiet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ w $\mathbb{R}^3$, i wywnioskuj, że $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus A) = \mathbb{Z}$;
2. (*link trywialny*) $\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)$ retrahuje się deformacyjnie na bukiet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ w $\mathbb{R}^3$, i wywnioskuj, że $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$;
3. (*link nietrywialny*) $\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup C)$ retrahuje się deformacyjnie na bukiet $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \vee \mathbb{S}^2$ w $\mathbb{R}^3$, i wywnioskuj, że $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup C)) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ćw. 7. Wyznacz grupę podstawową sumy spójnej powierzchni orientowalnej genusu g i płaszczyzny rzutowej.