

Topologia algebraiczna 1

Damian Osajda

Lista ćwiczeń nr 10

http://www.math.uni.wroc.pl/~dosaj/Wroc/Teaching/2018_TopAlg/2017_TopAlg.html

Homologie singularne

Ćw. 1. Pokaż, że $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Ćw. 2. Dowiedz, że $H_n(\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}) = \bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha})$.

Ćw. 3. Oblicz homologie singularne przestrzeni jednopunktowej.

Ćw. 4. Pokaż, że dla niepustej ścieżkowo spójnej przestrzeni X , odwzorowanie $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}: \sum n_i \sigma_i \mapsto \sum n_i$ indukuje izomorfizm $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Wywnioskuj, że $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

Ćw. 5. Pokaż, że odwzorowanie $f_{\#}: C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ indukowane przez odwzorowanie $f: X \rightarrow Y$ jest odwzorowaniem łańcuchowym, tzn. $f_{\#} \partial = \partial f_{\#}$.

Ćw. 6. Pokaż, że homotopijna równoważność $f: X \rightarrow Y$ indukuje izomorfizm $f_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$.

Ćw. 7. Pokaż, że formuła $\Delta^n \times I = \bigcup_i [v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$ definiuje triangulację pryzmy $\Delta^n \times I$.

Ćw. 8. Pokaż, że dla zadanych homotopijnych odwzorowań $f, g: X \rightarrow Y$, operator pryzmy $P: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ jest homotopią łańcuchową między odwzorowaniami indukowanymi $f_{\#}, g_{\#}$, czyli zachodzi równość $\partial P = g_{\#} - f_{\#} - P\partial$.

Ćw. 9. Zdefiniuj, w oczywisty sposób, odwzorowania indukowane $f_{\#}$ i f_* dla homologii zredukowanych. Dowiedz, że homotopijne odwzorowania $f, g: X \rightarrow Y$ indukują identyczne odwzorowania zredukowanych grup homologii.