Budynki Titsa, lista 2

1. Wyznacz graf Cayleya grupy $\langle s, t \mid s^2, t^2, (st)^m \rangle$ względem układu generatorów $\{s, t\}$.

Niech (W, S) będzie grupą ze skończonym zbiorem generatorów S składającym się z elementów rzędu 2. Rozważmy następujące warunki:

(C) W jest grupą Coxetera względem S.

(D) (Deletion) Jeśli $w = s_1 \dots s_d$ ale $\ell(w) < d$, to istnieją $i < j$ takie że $w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_d$.

(E) (Exchange) Jeśli $w = s_1 \dots s_d$ oraz $d = \ell(w) > \ell(ws)$, to istnieje i takie że $w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_d s$.

[$\hat{s}$ oznacza usunięcie (przykrycie kapeluszem) litery s, np. $a\hat{b}c = ac$]

2. Udowodnij, że $C \Rightarrow D \Rightarrow E$.
3. Udowodnij, że $E \Rightarrow C$ wedle poniższych wskazówek (lub inaczej)
   a) Dwa słowa zredukowane w zwykłym sensie są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy są homotopijne. [Stosuj indukcję ze względu na długość słowa; jeśli jedno ze słów kończy się na s a drugie na t, to wielokrotnie stosując (E) skonstruuj równoważne im słowa kończące się na $p(s, t)$ i $p(t, s)$.]
   b) Słowo jest zredukowane w zwykłym sensie wtedy i tylko wtedy gdy jest zredukowane.
   c) Dowodząc a) otrzymałeś liczby $m(s, t)$; niech U będzie grupą Coxetera generowaną przez S z prezentacją zadaną przez te liczby. Uzasadnij, że naturalny epimorfizm $U \to W$ ma trywialne jądro.
4. Używając warunku D lub E i działania S_n na rozbiciu barycentrycznym brzegu sympleksu udowodnij, że S_n jest grupą Coxetera.
5. Niech $V = K^{2n}$, $\omega(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_{2i-1}y_{2i} - x_{2i}y_{2i-1}$. Podprzestrzeń $W < V$ nazywamy *izotropową* jeśli dla wszelakich $x, y \in W$ zachodzi $\omega(x, y) = 0$. Budujemy kompleks symplicjalny X: zbiorem wierzchołków jest zbiór nietrywialnych izotropowych podprzestrzeni V, sympleksy odpowiadają flagom. Przebadaj ten kompleks w podobny sposób jak to robiliśmy na pierwszym wykładzie. (Czym będą apartamenty? Jaka grupa odegra rolę S_n?)