Budynki Titsa, lista 5

1. Zakładamy, że X jest budynkiem w którym każdy panel leży w skończenie wielu pokojach, zaś $G < Aut_+(X)$ domkniętą podgrupą działającą tranzytywnie na zbiorze $Ch(X)$ pokoi budynku X.
   a) Udowodnij, że dla każdego $s \in S$ istnieje liczba q_s taka że każdy panel typu s leży w $q_s + 1$ pokojach.
   b) Udowodnij, że jeśli m_{st} jest nieparzysta, to $q_s = q_t$.
   c) Udowodnij, że miara Haara stabilizatora pokoju nie zależy od wyboru pokoju.
2. Niech (W, S) będzie grupą Coxetera; dla każdego generatora $s \in S$ wybierzmy liczbę całkowitą dodatnią q_s (wybieramy tak, by dla m_{st} nieparzystego q_s było równe q_t). Algebrę H określamy jako łączną algebrę z jedynką zadaną przez generatory $(T_s)_{s \in S}$ i relacje $T_s^2 = q_s \cdot 1 + (q_s - 1) \cdot T_s$, $(T_s T_t)^{m_{st}/2} = (T_t T_s)^{m_{ts}/2}$. Udowodnij, że otrzymana algebra jest algebrą Heckego rozważaną na wykładzie. [Współczynniki można brać z $\mathbf{Z}$ lub z $\mathbf{C}$, wedle uznania.]
3. *Uogólnionym m-kątem* nazywamy spójny dwudzielny graf o średnicy m i systolu $2m$, w którym z każdego wierzchołka wychodzą przynajmniej dwie krawędzie (*systol* to długość najkrótszego zamkniętego cyklu). Udowodnij, że budynek o grupie Weyla $\langle s, t, | \ s^2, t^2, (st)^m \rangle$ jest uogólnionym m-kątem. Czy jest też odwrotnie?
4. Udowodnij, że w grubym (walencja każdego wierzchołka ≥ 3) uogólnionym m-kącie wierzchołki tego samego typu mają równe walencje. Jeśli ponadto m jest nieparzyste, to wszystkie wierzchołki mają taką samą walencję. (zakładamy $m < \infty$)
5. Niech (B, N) będzie BN-parą w G, $T \subseteq S$. Niech $N_T = \alpha^{-1}(W_T)$. Pokaż, że (B, N_T) jest BN-parą w P_T.
6. Niech b będzie pokojem X, A apartamentem zawierającym ten pokój. Udowodnij, że odwzorowanie $\rho_{b,A}\colon X \to \Sigma_W$ będące złożeniem $\pi_{b,A}$ i jedynego izomorfizmu $A \to \Sigma_W$ posyłającego b w 1 nie zależy od wyboru A. [Otrzymane $\rho_b\colon X \to \Sigma_W$, czy nawet indukowane przez nie $\rho_b\colon Ch(X) \to W$, nazwiemy abstrakcyjnym foldingiem.]
7. Niech $x \in Ch(X)$, $T \subseteq S$, $R = Res(x, T)$. Uzasadnij, że w R istnieje jedyny pokój x_0 najbliższy (w sensie odległości galeriowej) pokojowi b. Niech $\rho_R\colon R \to W_T$ będzie dane przez $\rho_R(y) = \rho_b(x_0)^{-1}\rho_b(y)$. Uzasadnij, że ρ_R jest (abtrakcyjnym) foldingiem budynku R zbazowanym w x_0.