Funkcje analityczne R. Lista 1

Trzy przykłady

1. Udowodnij, że funkcja $z \mapsto \frac{i-z}{i+z}$ odwzorowuje górną półpłaszczyznę $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ holomorficznie i bijekcyjnie na $B(0,1)$. Wyznacz wzór odwzorowania odwrotnego i sprawdź jego holomorficzność w $B(0,1)$.
2. Dla ustalonego $w \in B(0,1)$ rozważmy funkcję $F\colon z \mapsto \frac{w-z}{1-\overline{w}z}$. Uzasadnij, że:
   a) F odwzorowuje $B(0,1)$ holomorficznie i bijekcyjnie na $B(0,1)$;
   b) F zamienia 0 z w;
   c) $|F(z)| = 1$ dla $|z| = 1$;
3. Funkcja Żukowskiego określona jest wzorem $F(z) = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$. Uzasadnij, że odwzorowuje ona holomorficznie i bijekcyjnie zbiór $\mathbf{C}\setminus\overline{B}(0,1)$ na $\mathbf{C}\setminus[-1,1]$. (Wsk. Użyj w dziedzinie współrzędnych biegunowych.)

Równania Cauchy'ego–Riemanna

4. W których punktach holomorficzna jest funkcja

$$\operatorname{Re} z, \qquad z \operatorname{Re} z, \qquad x^2y^2, \qquad |z|^2, \qquad x^2+iy^2, \qquad 2xy - i(x^2-y^2).$$

5. Niech $f = u + iv$ będzie holomorficzna. Wyprowadź równania Cauchy'ego–Riemanna we współrzędnych biegunowych, wiążące pochodne cząstkowe u_r, u_θ, v_r, v_θ.
6. Zdefiniujmy logarytm wzorem $\log(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta$ (dla $r > 0$ i $-\pi < \theta < \pi$). Użyj poprzedniego zadania by pokazać holomorficzność tej funkcji.
7. Załóżmy, że $f = u + iv$ jest holomorficzna, a u, v są klasy C^2. Uzasadnij, że są one harmoniczne: $\Delta u = \Delta v = 0$, gdzie $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.
8. Wyraź Jakobian funkcji holomorficznej (potraktowanej jak przekształcenie $\mathbf{R}^2$) przez jej pochodną zespoloną.
9. Niech $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ będzie różniczkowalna jako rzeczywiste przekształcenie płaszczyzny. Załóżmy, że jej rzeczywista pochodna (w każdym punkcie) jest nieosobliwa, zachowuje orientację i zachowuje kąty między wektorami. Udowodnij, że f jest holomorficzna.
10. Sprawdź, że funkcja $f(x+iy) = \sqrt{|x| \cdot |y|}$ nie jest holomorficzna w 0, mimo że spełnia w tym punkcie równania Cauchy'ego–Riemanna.
11. Załóżmy, że f jest holomorficzna w obszarze Ω. Pokaż, że jest ona stała w każdym z następujących przypadków: (a) $\operatorname{Re} f$ jest stała; (b) $\operatorname{Im} f$ jest stała; (c) $|f|$ jest stała.

Różniczkowanie względem z i $\overline{z}$

Niech

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

(Można też używać skrótów: $\frac{\partial}{\partial z} f = \partial_z f = f_z$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \partial_{\bar{z}} f = f_{\bar{z}}$.)

12. Sprawdź, że operacje ∂_z i $\partial_{\bar{z}}$ są liniowe i spełniają regułę Leibniza.
13. Sprawdź, że $\partial_z z = 1$, $\partial_{\bar{z}} z = 0$, $\partial_z \bar{z} = 0$, $\partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1$.
14. Sprawdź wzór $4\,\partial_{\bar{z}}\partial_z = 4\,\partial_z\partial_{\bar{z}} = \Delta$.
15. Oblicz $\partial_z^n \partial_{\bar{z}}^k (z^a \bar{z}^b)$ (dla $a, b, n, k \in \mathbf{N}$).
16. Niech $P(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y]$ będzie wielomianem dwóch zmiennych o współczynnikach zespolonych. Uzasadnij, że istnieje jedyny wielomian $Q(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y]$, taki że $P(x,y) = Q(z,\bar{z})$ (gdzie $z = x+iy$). Znajdź go dla $P(X,Y) = X^2Y - XY^2 + 2iXY$.
17. Niech $P(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y]$. Udowodnij, że funkcja $\mathbf{C} \ni x+iy \mapsto P(x,y) \in \mathbf{C}$ jest holomorficzna $\iff$ istnieje $Q(Z) \in \mathbf{C}[Z]$, taki że $P(x,y) = Q(x+iy)$ dla każdego $x+iy \in \mathbf{C}$.
18. Niech $Q(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y]$. Uzasadnij, że $Q(X,Y) \in \mathbf{C}[X] \iff \partial_{\bar{z}} Q(z,\bar{z}) = 0$.

19. Rozstrzygnij, który z podanych wielomianów daje się wyrazić jako wielomian zmiennej $z(= x + iy)$:

$$1 + x + 2x^2 - 2y^2 + i(y + 4xy), \qquad 1 + x + 2x^2 - 2y^2 + i(y - 4xy).$$

20. Wyprowadź regułę łańcucha dla $\partial_{\bar{z}}$. Użyj jej by pokazać, że jeśli f jest holomorficzna, to $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ też jest holomorficzna.

Szeregi potęgowe

21. Wyznacz promień zbieżności szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dla
    a) $a_n = (\log n)^2$;
    b) $a_n = n!$;
    c) $a_n = \frac{n^2}{4^n+3n}$;
    d) $a_n = \frac{(n!)^3}{(2n)!}$;
22. Zbadaj zbieżność w punktach na brzegu koła zbieżności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{\log n}.$$

23. Niech

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z - z^2}{2} \right)^{3^k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Udowodnij, że pierwszy z szeregów zbiega w obszarze zawierającym $B(0,1) \cup B(1,1)$, podczas gdy drugi z nich ma koło zbieżności $B(0,1)$. (Jest to ilustracja zjawiska *nadzbieżności:* pewien ciąg sum częściowych drugiego szeregu zbiega – niemal jednostajnie – na obszarze istotnie większym niż koło zbieżności.)

24. Udowodnij, że funkcja zadana szeregiem potęgowym rozwija się w każdym punkcie swego (otwartego) koła zbieżności w szereg potęgowy (o dodatnim promieniu zbieżności).
25. Udowodnij, że zbioru liczb naturalnych nie da się przedstawić w postaci rozłącznej sumy skończenie wielu postępów arytmetycznych o parami różnych skokach. (Wsk. Zsumuj szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} z^{an+b}$; użyj odpowiedniego punktu na brzegu koła zbieżności.)
26. Jak mawiają artylerzyści, w warunkach bojowych sinus potrafi stać się większy od 1. Zbadaj, czy istnieje zespolone z spełniające $\sin z = 7$.
27. Udowodnij, że dla każdego $z \in \mathbf{C}$ zachodzi

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$