Problem Dirichleta

Niech $u \colon \partial B(0,1) \to \mathbf{R}$ będzie ciągła. Znaleźć ciągłe rozszerzenie $u \colon \overline{B}(0,1) \to \mathbf{R}$ harmoniczne w $B(0,1)$.

Twierdzenie

Problem Dirichleta ma jednoznaczne rozwiązanie – dane wzorem

$$(P) \qquad u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it}) P_r(\theta - t)\,dt, \qquad \text{gdzie} \qquad P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}.$$

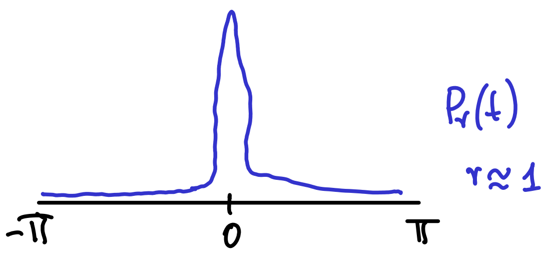
Dowód.

Poprzednim razem sprawdziliśmy, że wzór (P) zadaje w $B(0,1)$ funkcję harmoniczną. Pozostaje pokazać ciągłość u na brzegu $B(0,1)$.

Lemat (własności jądra Poissona)

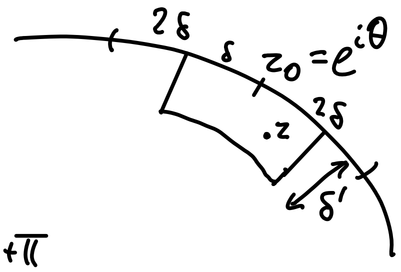
Funkcja $P_r(t)$:

a) jest określona dla $0 \le r < 1$, $t \in \mathbf{R}$;
b) jest 2π–okresowa względem t;
c) $\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = 2\pi$;
d) na $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$: $P_r(t) \rightrightarrows 0$ przy $r \to 1$ (dla $\epsilon > 0$).



Niech $z_0 = e^{i\theta}$. Chcemy sprawdzić, że

$$\overline{B}(0,1) \ni \lim_{z \to z_0} u(z) = u(z_0)$$



Ustalmy $\epsilon > 0$. Dobierzmy $\delta, \delta' > 0$ tak, by

1) dla $|t - \theta| \le 2\delta$ zachodziło $|u(e^{i\theta}) - u(e^{it})| < \epsilon$;
2) dla $|t - \theta| \ge \delta$ i $r \ge 1 - \delta'$ zachodziło $P_r(\theta - t) < \epsilon$.

Wówczas, dla $z = re^{i\theta'}$, $r > 1 - \delta'$, $|\theta - \theta'| < \delta$:

$$|u(z_0) - u(z)| = \left| u(z_0) - \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} u(e^{it}) P_r(\theta' - t)\,dt \right| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \big(u(z_0) - u(e^{it})\big) P_r(\theta' - t)\,dt \right| \le$$

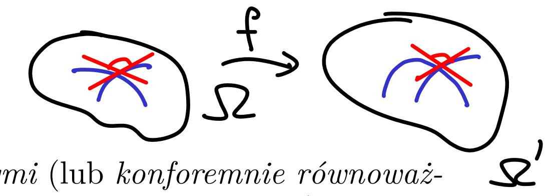
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} |u(z_0) - u(e^{it})|\, P_r(\theta' - t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\underbrace{\int_{|\theta - t| \le 2\delta}}_{|u(z_0) - u(e^{it})| < \epsilon} + \underbrace{\int_{|\theta - t| \ge 2\delta}}_{\substack{|\theta' - t| \ge \delta \\ P_r(\theta' - t) \le \epsilon}} \Big) \le \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{2\pi} \epsilon P_r(\theta' - t)\,dt + \int_0^{2\pi} 2M\epsilon\,dt \Big) = (1 + 2M)\epsilon$$

$$M = \sup_{t \in \mathbf{R}} |u(e^{it})|$$

$\square$

Automorfizmy

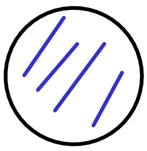


Definicja

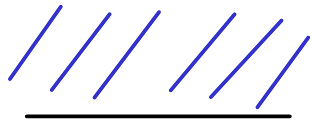
Otwarte zbiory $\Omega, \Omega' \subseteq \overline{\mathbf{C}}$ nazywamy *biholomorficznymi* (lub *konforemnie równoważnymi*) jeśli istnieją holomorficzne wzajemnie odwrotne funkcje $f\colon \Omega \to \Omega'$, $f^{-1}\colon \Omega' \to \Omega$ (zwane biholomorfizmami). Biholomorfizm zbioru Ω na siebie nazywamy *automorfizmem.* Grupę wszystkich automorfizmów Ω oznaczamy $\mathrm{Aut}(\Omega)$.

Przykłady.

1) Otwarty dysk jednostkowy $\mathbf{D} = B(0,1) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ i górna półpłaszczyzna $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ są biholomorficzne (przez transformatę Cayley'a).



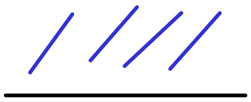
$$= \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}$$



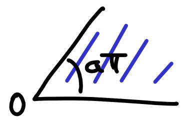
$$z \longmapsto i\,\frac{1-z}{1+z}$$

$$\frac{i-z}{i+z} \longleftarrow z$$

2) Sektor $\mathbf{S}_a = \{z \in \mathbf{C} \mid \arg(z) \in (0, a\pi)\}$ jest biholomorficzny z $\mathbf{H}$. $0<a<1$



$$= \mathbb{H} \ni z \longmapsto z^a \in \mathbb{S}_a =$$



$$z^a = \exp(a \operatorname{Log} z), \quad \operatorname{Log}(re^{it}) = \log r + it$$

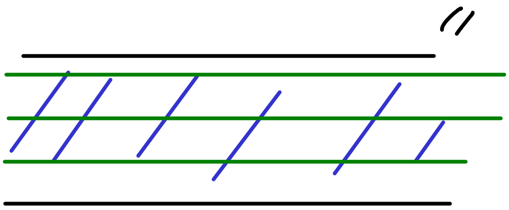
$0<t<\pi$

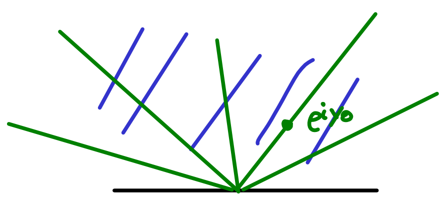
$$(re^{it})^a = \exp\left(a(\operatorname{Log} r + it)\right) = e^{a \log r} \cdot e^{ait} =$$

$$= r^a \cdot e^{iat}$$

3) Pas $\mathbf{P} = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ jest biholomorficzny z $\mathbf{H}$.

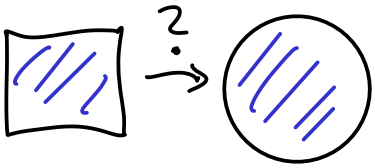
$$\mathbb{P} \ni z \longmapsto e^z \in \mathbb{H}$$





$$x + iy_0 \longmapsto \underset{(0,\infty)}{e^x} \cdot \underset{\text{stałe}}{e^{iy_0}}$$

4) Czy kwadrat $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in (0,1)\}$ jest biholomorficzny z $\mathbf{D}$?



$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$
$= B(0,1)$

5) $\overline{\mathbf{C}}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ są parami niebiholomorficzne.

- Z zasady maksimum: dowolne holomorficzne $f\colon \overline{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ jest stałe.
- Z tw. Liouville'a: dowolne holomorficzne $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ jest stałe.

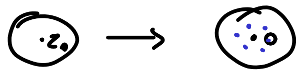
Twierdzenie
Holomorficzna bijekcja jest biholomorfizmem.

$f \in \mathcal{O}(\Omega)$

Dowód. Niech $f\colon \Omega \to \Omega'$ będzie bijekcją. Pokażemy, że $f'(z) \neq 0$ dla każdego $z \in \Omega$. Gdyby $f'(z_0) = 0$ dla pewnego $z_0 \in \Omega$, to w pewnym otoczeniu z_0

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)^k g(z), \quad g(z_0) \neq 0, \quad k \geq 2$$

$$= f(z_0) + \varphi(z)^k, \quad \varphi(z_0) = 0, \ \varphi'(z_0) \neq 0$$

$\varphi:$ 

f nie jest 1-1 w z_0.

$z, z' \longrightarrow w, \epsilon_k w$

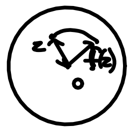
$\Uparrow$

$\varphi(z)^k = w^k = (\epsilon_k w)^k = \varphi(z')^k \quad \varphi[B(z_0,\epsilon)]$

$f(z) = f(z')$

$\square$

Lemat (Schwarz)
Niech holomorficzna $f\colon \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ spełnia $f(0) = 0$. Wtedy



1) $(\forall z \in \mathbf{D})(|f(z)| \leq |z|)$;
2) $|f'(0)| \leq 1$.

Równość (w 2, lub w 1 dla choćby jednego niezerowego z) zachodzi jedynie gdy f jest obrotem wokół 0.

Dowód.
Skoro $f(0) = 0$, to $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ jest holomorficzna w $\mathbf{D}$ ($g(0) = f'(0)$). Z zasady maksimum:

$$|g(z)| \leqslant \max_{|w|=1-\epsilon} |g(w)| = \max_{|w|=1-\epsilon} \frac{|f(w)|}{|w|} = \frac{1}{1-\epsilon} \quad \text{dla małych } \epsilon > 0$$

o ile $|z| < 1-\epsilon$

$$\frac{1}{1-\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 1 \qquad \Rightarrow \quad |g(z)| \leqslant 1$$

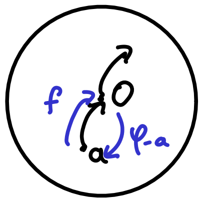
Równość może zajść jedynie gdy g jest stała.

$$\underset{|\alpha|=1}{\alpha} = g(z) = \frac{f(z)}{z} \implies f(z) = \alpha \cdot z, \quad |\alpha| = 1$$

Twierdzenie

Biholomorfizmy dysku $\mathbf{D}$ są postaci

$$z \mapsto e^{it} \underbrace{\frac{z-a}{1-\overline{a}z}}_{\varphi_a(z)}, \qquad t \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{D}.$$



Dowód.

Niech $f \in \mathrm{Aut}(\mathbf{D})$, $f(a) = 0$. Wtedy zarówno $g = f \circ \varphi_{-a}$ jak i g^{-1} są automorfizmami $\mathbf{D}$ trzymającymi 0. Z lematu Schwarza:

$$|g'(0)|, |(g^{-1})'(0)| \leq 1 \qquad \text{ale} \quad g'(0) \cdot (g^{-1})'(0) = 1$$

stąd $|g'(0)| = |(g^{-1})'(0)| = 1 \implies g(z) = e^{it} z$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$

$$f \circ \varphi_{-a}(z) = e^{it} z \qquad z := \varphi_a(w)$$

$$f(w) = e^{it} \varphi_a(w) = e^{it} \frac{w-a}{1-\overline{a}w} \qquad \square$$

$$f(w) = \frac{e^{it} w - e^{it} a}{(-\overline{a}) w + 1}$$

Dla odwracalnej macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbf{C})$ i liczby $z \in \overline{\mathbf{C}}$ określamy:

$$\psi_A(z) = A.z = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$GL(2, \mathbb{C}) = \{ A \in M_{2\times 2}\mathbb{C} \mid \det A \neq 0 \}$$

Homografie

Przykłady.

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}.z = \frac{\lambda\cdot z+0}{0\cdot z+\lambda} = z \qquad (\lambda A).z = A.z$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}.z = \frac{az+b}{0\cdot z+1} = az+b$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.z = \frac{0\cdot z+1}{1\cdot z+0} = \frac{1}{z}$$

Lemat

Niech $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbf{C})$ będą odwracalnymi macierzami, $z \in \overline{\mathbf{C}}$. Wtedy

$$(AB).z = A.(B.z)$$

(Operacja $A.z$ jest działaniem grupy $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ na $\overline{\mathbf{C}}$.)

Dowód.

Niech $v \sim w$ oznacza proporcjonalność wektorów ($v = \lambda w$).

$$M.z = w \iff M\begin{pmatrix}z\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}w\\1\end{pmatrix}$$

$$\frac{az+b}{cz+d} = w \iff \begin{pmatrix}az+b\\cz+d\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}w\\1\end{pmatrix}$$

Inaczej: $M\begin{pmatrix}z\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}M.z\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}(AB).z\\1\end{pmatrix} \sim AB\begin{pmatrix}z\\1\end{pmatrix} = A\left(B\begin{pmatrix}z\\1\end{pmatrix}\right) \sim A\begin{pmatrix}B.z\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}A.(B.z)\\1\end{pmatrix}$$

$\square$

Fakt

Niech $A, B \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$. Wówczas: $\psi_A = \psi_B \iff (\exists \lambda \in \mathbf{C}\setminus\{0\})(A = \lambda B)$.

(ZAD)

Twierdzenie

Biholomorfizmy $\overline{\mathbf{C}}$ są homografiami.

Grupa $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbf{C}})$ jest izomorficzna z $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C}) = \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})/\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\}$.

Lemat 1

Dla dowolnych parami różnych $a, b, c \in \overline{\mathbf{C}}$ istnieje $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$, takie że $A.a = 0$, $A.b = 1$, $A.c = \infty$.

Dowód Lematu:

$$\begin{array}{ccccccc}
a & \longrightarrow & a' & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
b & \longrightarrow & b' & \longrightarrow & b'' & \longrightarrow & 1 \\
c & \longrightarrow & \infty & \longrightarrow & \infty & \longrightarrow & \infty \\
 & \frac{1}{z-c} & & z-a' & & z/b'' & \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & -a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b'' \end{pmatrix} &
\end{array}$$

(jeśli $c=\infty$, pomijamy pierwszy krok)

$\square$

Szukane A to iloczyn powyższych macierzy.

Dowód Twierdzenia.

Niech $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbf{C}})$. Dobierzmy A tak, by $A.f(0) = 0$, $A.f(\infty) = \infty$. Wtedy $g = \psi_A \circ f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbf{C}})$, $g(0) = 0$, $g(\infty) = \infty$.

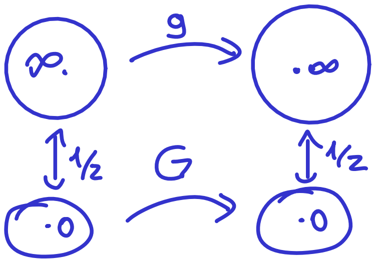
Lemat 2

Funkcja $\frac{g(z)}{z}$ jest ograniczona na $\mathbf{C}\setminus\{0\}$.

Dowód Lematu:

$$\lim_{z\to 0} \frac{g(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{g(z)-g(0)}{z-0} = g'(0) \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{g(z)}{z} = \lim_{w\to 0} \frac{g(1/w)}{1/w} = \lim_{w\to 0} \frac{G(w)^{-1}}{w^{-1}} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{G(w)} = \frac{1}{G'(0)} \in \mathbb{C}$$



$$G(w) = \frac{1}{g(1/w)}$$

$\square$ (L)

Funkcja $\mathbf{C} \ni z \mapsto \frac{g(e^z)}{e^z}$ jest holomorficzna i ograniczona, więc (Liouville) stała.

$$c = \frac{g(e^z)}{e^z}, \quad g(e^z) = ce^z, \quad g(w) = cw \Rightarrow \psi_A \circ f = \psi_{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$f = \psi_A^{-1} \circ \psi_{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \psi_{A^{-1}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

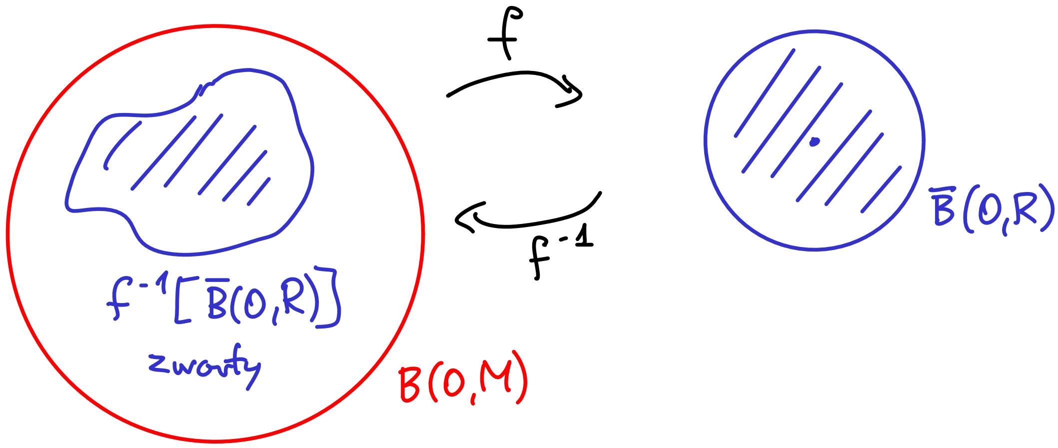
$\square$ (T)

Twierdzenie
Automorfizmy $\mathbf{C}$ są postaci

$$z \mapsto az + b, \qquad a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbf{C}.$$

Dowód. Niech $f \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$. Zauważmy, że $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$:

$$(\forall R > 0)(\exists M > 0)\ (\ |z| > M \Rightarrow |f(z)| > R)$$



Zatem f ma w nieskończoności osobliwość typu biegun.
Po uzupełnieniu przez $f(\infty) = \infty$ dostajemy automorfizm $\overline{\mathbf{C}}$ trzymający ∞.

$$f = \psi_A\ , \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\infty = A.\infty = \frac{a\cdot\infty + b}{c\cdot\infty + d} \Rightarrow c = 0$$

$$f(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.z = \frac{az+b}{d} = \left(\frac{a}{d}\right)\cdot z + \left(\frac{b}{d}\right) \qquad \square$$