Formy różniczkowe, lista 1

1. Niech $u = x$, $v = \frac{y}{x}$. Przelicz formy dx, dy i pola wektorowe ∂_x, ∂_y ze współrzędnych x, y na współrzędne u, v.
2. Sprytnie utożsamiając $\Omega^1\mathbf{R}^3$ i $\Omega^2\mathbf{R}^3$ z $\mathcal{X}(\mathbf{R}^3)$ oraz $\Omega^3\mathbf{R}^3$ z $C^\infty(\mathbf{R}^3)$ zinterpretuj $d\colon \Omega^k\mathbf{R}^3 \to \Omega^{k+1}\mathbf{R}^3$ jako gradient, dywergencję lub rotację, w zależności od k.
3. Uzasadnij wzory:
   $(F \circ G)^*\omega = G^*F^*\omega$;
   $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge d\eta$;
   $dd\omega = 0$.
4. Niech (U, x) będzie mapą na rozmaitości M, $p \in U$, $\omega \in \Omega^k M$. Dla $v \in T_pM$ określamy $dx^i(v)$ jako i-tą współrzędną wektora v w bazie $(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p)_j$. Jeśli X jest polem wektorowym, to określmy funkcję na U wzorem $dx^i(X)(p) = dx^i(X_p)$. Niech $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$. Jeśli $\omega = \sum \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, to

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) := \sum \omega_{i_1,\ldots,i_k}(p) \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, dx^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot dx^{i_k}(v_{\sigma(k)})$$

   a) Uzasadnij, że $\omega(v_1, \ldots, v_k)$ nie zależy od wyboru mapy (U, x) i jest k-liniową antysymetryczną funkcją $v_1, \ldots, v_k$.
   b) Zauważ, że jeśli $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(M)$, to $\omega(X_1, \ldots, X_k)$ jest gładką funkcją na M.
   c) Uzasadnij, że jeśli $F\colon \mathcal{X}(M) \times \ldots \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty M$ jest antysymetryczna i względem każdego argumentu $C^\infty M$-liniowa, to istnieje (jedyna!) forma $\omega \in \Omega^k M$, taka że dla dowolnych $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ zachodzi $F(X_1, \ldots, X_k) = \omega(X_1, \ldots, X_k)$.
5. Wyprowadź z tw. Stokesa wzór $\iint_\Sigma \langle \nabla \times X, N\rangle dA = \int_{\partial\Sigma} \langle T, X\rangle ds$.
6. Udowodnij, że nie ma takiej 2-formy na $\mathbf{R}^3$, która obcięta do każdej powierzchni dawałaby formę powierzchni tej powierzchni (powiedzmy: z dokładnością do znaku).
7. Na $\mathbf{C}^n$ ze współrzędnymi $z^j = x^i + iy^j$ rozważmy formę $\omega = \sum_j dx^j \wedge dy^j$. Uzasadnij, że dla dowolnej $2k$-wymiarowej podrozmaitości $V \subset \mathbf{C}^n$ o skończonej objętości mamy $\frac{1}{k!}\int_V \omega^k \leq \int_V \mathrm{vol}_V$, przy czym równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy V jest zespolona, tzn. gdy dla każdego $p \in V$ przestrzeń styczna T_pV jest zespoloną liniową podprzestrzenią $\mathbf{C}^n$.
8. Sformułuj definicję rozmaitości z kantami. Udowodnij tw. Stokesa dla orientowalnej zwartej rozmaitości z kantami, w szczególności dla sympleksu.
9. Grupa Heisenberga to

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$$

   z mnożeniem macierzy jako działaniem. Dla $g \in H$ określamy $l_g\colon H \to H$ wzorem $l_g(h) = gh$ oraz $r_g\colon H \to H$ wzorem $r_g(h) = hg$. Opisz wszystkie pola wektorowe które są niezmiennicze na (a) wszystkie przekształaenia l_g; (b) wszystkie przekształcenia r_g; (c) wszystkie przekształaenia l_g i wszystkie przekształcenia r_g. Następnie zrób to samo dla form stopni 0,1,2,3.

Literatura:
Bott, Tu, Differential forms in algebraic topology
Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry
Duszenko, `http://duch.mimuw.edu.pl/~aweber/semag2007/formy.pdf`
Wells, Differential analysis on complex manifolds
Griffiths, Harris, Principles of algebraic geometry, wstęp.
Warner F., Foundations of differentiable manifolds and Lie groups
De Rham, Differentiable manifolds
Milnor, Stasheff, Characteristic classes, dodatek o teorii Cherna–Weila