Formy różniczkowe, lista 2

Konwencje: M i N zawsze są spójne. Rozmaitość zamknięta to zwarta rozmaitość bez brzegu. Kohomologie to kohomologie de Rhama.

1. Dla $(k+1)$-formy ω i pola wektorowego X definiujemy k-formę $\iota_X\omega$ wzorem

$$\iota_X\omega(X_1,\ldots,X_k) := \omega(X,X_1,\ldots,X_k).$$

Udowodnij wzór $\mathcal{L}_X\omega = d\iota_X\omega + \iota_X d\omega$. Do złudzenia przypomina on dowód lematu Poincarégo (ten z wykładu, jak i ten z zadania poniżej) – czy potrafisz to podobieństwo sformułować bardziej precyzyjnie? [Jest to tzw. wzór Cartana. Formę $\iota_X\omega$ nazywamy kontrakcją formy ω i pola X (pol. zwężeniem).]

2. Niech $\omega = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(U)$, gdzie U jest gwiaździstym podzbiorem $\mathbf{R}^n$. Zdefiniujmy $I\omega$ następującym koszmarnym wzorem

$$(I\omega)_x = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^{k-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)dt\right)x^{i_\alpha}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

Wytrwałym rachunkiem – lub z użyciem wzoru Cartana – pokaż, że $\omega = d(I\omega) + I(d\omega)$.

3. Udowodnij, że

$$\begin{aligned} d\omega(X_1,\ldots,X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_{k+1})) \\ &+ \sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_{k+1}) \end{aligned}$$

4. Niech $\omega,\eta\in\Omega^*(M)$, $\pi_i\colon M\times M\to M$ niech będzie rzutem na i-tą oś, $\Delta\colon M\to M\times M$ włożeniem przekątniowym ($\Delta(m)=(m,m)$). Uzasadnij, że $\omega\wedge\eta = \Delta^*(\pi_1^*\omega\wedge\pi_2^*\eta)$.

---

5. Udowodnij, że otwarty wypukły podzbiór $\mathbf{R}^n$ jest dyfeomorficzny z $\mathbf{R}^n$.
6. Niech M, N będą zamkniętymi rozmaitościami.
   a) Pokaż, że dowolne ciągłe $f\colon M\to N$ można jednostajnie przybliżać odwzorowaniem gładkim.
   b) Uzasadnij, że dowolne dwa takie (dostatecznie dokładne) przybliżenia f są gładko homotopijne.
7. Dla skończonego zbioru F wyznacz (a) $H^*(\mathbf{R}^2\setminus F)$; (b)$H^*(\mathbf{R}^n\setminus F)$; (c) $H_c^*(\mathbf{R}^2\setminus F)$; (d)$H_c^*(\mathbf{R}^n\setminus F)$.
8. Niech M, N będą zamkniętymi, zorientowanymi, n-wymiarowymi rozmaitościami. Stopień $\deg(f)$ gładkiego $f\colon M\to N$ definiujemy jako liczbę, przez którą mnożeniem jest $f^*\colon H^n(N)\to H^n(M)$ (przy czym $H^n(M)$ utożsamiamy z $\mathbf{R}$ przez $[\omega]\mapsto\int_M\omega$, i także samo dla N). Uzasadnij, że jeśli q jest wartością regularną f, to stopień f jest równy liczbie elementów zbioru $f^{-1}(q)$ rachowanej z uwzględnieniem znaków (mówiących, czy f w danym punkcie zmienia czy zachowuje orientację). [Wsk. Dobierz do punktu q formę $\omega\in\Omega^n(N)$ której klasa generuje $H^n(N)$.] Wywnioskuj, że (a) znakowana liczność $f^{-1}(q)$ nie zależy od wyboru wartości regularnej q; (b) stopień f jest liczbą całkowitą.
9. Prześledź poprzednie zadanie nie zakładając zwartości M i N, a za to zakładając, że f jest właściwe – i używając H_c^n w zamiast H^n.
10. Oblicz stopień wielomianu stopnia n traktowanego jako właściwe przekształcenie $\mathbf{C}$ w $\mathbf{C}$. Uzasadnij też, że jeśli uzwarcić $\mathbf{C}$ jednym punktem ∞, to wielomian rozszerzy sie (wzorem $\infty\mapsto\infty$) do gładkiego przekształcenia S^2 w siebie; jaki będzie stopień takiego rozszerzenia?
11. Udowodnij, że jeśli $p\colon M\to N$ jest skończonym nakryciem a N jest zamknięta, to $p^*\colon H^*(N)\to H^*(M)$ jest różnowartościowe.
12. Sformułuj założenia przy których wzór Künnetha działa dla kohomologii de Rhama o nośnikach zwartych.
13. Używając ciągu Mayera-Vietorisa policz kohomologie wielu różnych rozmaitości.