Formy różniczkowe, lista 3

Konwencje: M i N zawsze są spójne. Rozmaitość zamknięta to zwarta rozmaitość bez brzegu. Kohomologie to kohomologie de Rhama. Wiązka zorientawana to wiązka z wybranymi zgodnie orientacjami włókien.

0. Przeczytaj tę listę ze zrozumieniem.
1. Niech E, F będą wiązkami zorientowanymi nad bazą M. Nadaj sens formule $\Phi(E \oplus F) = \Phi(E) \wedge \Phi(F)$ i udowodnij jej prawdziwość.
2. Uzasadnij, jeśli podrozmaitości R, S (zwarte, zorientowane) przecinają się transwersalnie, to
   a) ich przekrój też jest podrozmaitością;
   b) $\eta_{R\cap S} = \eta_R \wedge \eta_S$ (w kohomologiach).
3. Niech E będzie zorientowaną wiązką nad N, $f\colon M \to N$ odwzorowaniem gładkim, $F\colon f^*E \to E$ nakrywającym f naturalnym odwzorowaniem wiązek. Uzasadnij, że
   a) $F^*\Phi(E) = \Phi(f^*E)$;
   b) $f^*e(E) = e(f^*(E))$.
4. Niech s będzie transwersalnym do cięcia zerowego cięciem wiązki E nad M, zaś Z jego zbiorem zer. Uzasadnij, że wiązka normalna do Z w M jest izomorficzna z obcięciem wiązki E do Z.

5.* Udowodnij, że jeśli – przy oznaczeniach poprzedniego zadania – M jest zamknięta i wszystko jest zorientowane, to klasa $e(E) \in H^*(M)$ jest dualna w sensie Poincarégo do Z w M.

6. Zidentyfikuj rzeczywisty wariant wiązki $\mathcal{O}(n)$ jako wiązkę produktową (trywialną) lub wstęgę Möbiusa.
7. Policz klasę Eulera wiązki $\mathcal{O}(n)$ nad $\mathbf{C}P^1$ (czyli nad $\overline{\mathbf{C}}$) dla wszystkich n całkowitych.
8. Uzasadnij, że $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$.
9. Nad $\mathbf{C}P^1$ rozważamy wiązkę tautologiczną: włóknem nad prostą ℓ jest prosta ℓ. Zidentyfikuj tę wiązkę jako $\mathcal{O}(-1)$
10. Zinterpretuj wielomian jednorodny k-tego stopnia $n+1$ zmiennych zespolonych jako cięcie odpowiedniej wiązki nad $\mathbf{C}P^n$ (zwanej $\mathcal{O}(k)$; czasem dla precyzji pisze się $\mathcal{O}_{\mathbf{C}P^n}(k)$).
11. Wylicz kohomologie $\mathbf{C}P^2$. (To się przyda w następnych zadaniach; powinno wyjść $\mathbf{R}$ w wymiarach $0, 2, 4$, i zero w pozostałych.)
12. Niech $H = e(\mathcal{O}(1)) \in H^2(\mathbf{C}P^2)$. Uzasadnij, że $e(\mathcal{O}(k)) = kH$.
13. Udowodnij, że przecinające się transwersalnie krzywe w $\mathbf{C}P^2$ zadane przez wielomiany jednorodne stopni k i ℓ mają $k \cdot \ell$ punktów przecięcia.
14. Wyznacz klasę Eulera wiązki normalnej do standardowego $\mathbf{C}P^1$ w $\mathbf{C}P^2$.
15. Znajdź włożenie $\mathbf{C}P^1$ w $\mathbf{C}P^2$ z klasą Eulera wiązki normalnej inną niż w poprzednim zadaniu.
16. Rozważ pole wektorowe X które jest transwersalne do zerowego cięcia wiązki TM.
    a) Narysuj jak może wyglądać X w otoczeniu swojego zera.
    b) Niech $X_p = 0$. Używając (zgodnej z orientacją M) mapy na otoczeniu U punktu p możemy, dla $q \in U$, utożsamić T_qM z $\mathbf{R}^n$. Dzieki temu można określić, dla ϵ bliskich zeru, funkcję $f_\epsilon\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ wzorem $f_\epsilon(v) = \frac{X(p+\epsilon v)}{\|X(p+\epsilon v)\|}$. Uzasadnij, że stopień f_ϵ nie zależy od wyboru mapy i (małego) ϵ. Ile on wynosi? (Ten stopień nazywamy indeksem pola X w punkcie p i oznaczamy $\mathrm{ind}_p X$)
    c) Dla każego całkowitego n narysuj na płaszczyźnie pole wektorowe które w zerze ma izolowane zero indeksu n. Napisz też to pole wzorem, aby przekonać się, że naprawdę może być ono gładkie.
17. Niech F będzie skończonym podzbiorem zamkniętej zorientowanej powierzchni Σ. Dla $p \in F$ ustalmy parami rozłączne otwarte otoczenia U_p i ich dyfeomorfizmy ψ_p z dyskiem $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$. Niech $E = (\Sigma \setminus F) \times \mathbf{C} \sqcup \bigsqcup_{p\in F} U_p \times \mathbf{C}/\sim$, gdzie dla $q \in U_p \setminus \{p\}$ utożsamiamy element $(q, w) \in (\Sigma \setminus F) \times \mathbf{C}$ z $(q, \psi_p(q)(w)) \in U_p \times \mathbf{C}$. Wyznacz klasę Eulera otrzymanej wiązki.
18. Uzasadnij, że orientowalna wiązka płaszczyzn nad orientowalną powierzchnią zamkniętą staje się trywialna po usunięciu z bazy jednego punktu (z przestrzeni totalnej wiązki – włókna nad tym punktem). Czy obserwując trywializację o której mowa w pobliżu usuwanego punktu potrafisz zobaczyć klasę Eulera oryginalnej wiązki?