Formy różniczkowe, lista 4

Wszystkie (pre)snopy to (pre)snopy R-modułów nad przestrzenią X.

1. Sprawdź, że jeśli presnop F jest snopem, to jest równy swojemu usnopieniu: $F = \mathcal{F}$.
2. Sprawdź, że jeśli $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ jest ciągiem dokładnym snopów, to $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ jest dokładny dla każdego otwartego $U \subseteq X$
3. Sprawdź, że zwiotczenie jest funktorem dokładnym na kategorii snopów:
   a) Każdemu morfizmowi snopów $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ przypisz $\mathcal{W}^0(\phi)\colon \mathcal{W}^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{W}^0(\mathcal{G})$, tak aby $\mathcal{W}^0(id) = id$, $\mathcal{W}^0(\phi \circ \psi) = \mathcal{W}^0(\phi) \circ \mathcal{W}^0(\psi)$.
   b) Pokaż, że jeśli $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ jest dokładny, to $0 \to \mathcal{W}^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{W}^0(\mathcal{G}) \to \mathcal{W}^0(\mathcal{H}) \to 0$ też jest dokładny.
4. Zrób poprzednie zadanie zastępując wszędzie $\mathcal{W}^0$ przez $\mathcal{W}^n$.
5. Używając lematu o wężu zwiąż z każdym krótkim ciągiem dokładnym snopów $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ długi ciąg dokładny kohomologii:
$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{H}) \to H^2(X,\mathcal{F}) \to \dots$$
6. Sprawdź, że jeśli $F \to G \to H$ jest dokładnym ciągiem presnopów (dla każdego otwartego $U \subseteq X$ ciąg $F(U) \to G(U) \to H(U)$ jest dokładny), to odpowiadający mu ciąg usnopień $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ też jest dokładny (dla każdego $x \in X$ ciąg $\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ jest dokładny).
7. Zdefiniuj iloraz presnopów (w najgłupszy możliwy sposób) i iloraz snopów (który ma być snopem i pasować do ciągu dokładngo $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{F} \to 0$). Podaj przykład dwóch snopów ktorych iloraz presnopowy nie jest snopem. Uzasadnij, że usnopienie ilorazu presnopowego snopów można utożsamić z ich ilorazem snopowym.
8. Zdefiniuj snop orientacji tak, by prawdziwy był obiegowy pogląd mówiący że 'orientacja to cięcie snopa orientacji'.
9. Udowodnij, że snop funkcji gładkich na rozmaitości jest miękki.
10. Niech $p \in X$. *Drapaczem chmur* (ang. skyscryper sheaf) ustawionym w p nazywamy snop określony tak: $\mathcal{I}_p(U) = 0$ jeśli $p \notin U$; $\mathcal{I}_p(U) = R$ jeśli $p \in U$. Sprawdź, że jest to snop; opisz jego przestrzeń etalną; wylicz jego kohomologie. Rozpatrz też przypadek snopa manhattan (kilka drapaczy chmur na raz).
11. Niech X będzie sferą Riemanna (lub powierzchnią Riemanna), $p \in X$. Niech $\mathcal{O}(p)$ oznacza podsnop snopa funkcji holomorficznych na X składający się z funkcji które zerują się w p (o ile p jest w ich dziedzinie). Wyznacz iloraz snopów $\mathcal{O}/\mathcal{O}(p)$.
12. Skonstruuj wiązkę holomorficzną, taką że snop $\mathcal{O}(p)$ z poprzedniego zadania jest snopem jej cięć holomorficznych.
13. Niech R będzie pierścieniem (przemiennym, z 1; możesz też założyć brak dzielników zera, wtedy niektóre części uproszczą się nieco), zaś X zbiorem jego wszystkich ideałów pierwszych. Definiujemy na X topologię Zariskiego deklarując jako domknięte zbiory postaci $V(a) = \{p \in X \mid a \subseteq p\}$, gdzie a przebiega wszystkie ideały pierścienia R.
   a) Sprawdź, że jest to topologia.
   b) Sprawdź, że zbiory postaci $D(f) = V((f))$, dla $f \in R$, tworzą bazę zbiorów otwartych tej topologii.
   c*) Uzasadnij, że na X istnieje jedyny snop $\mathcal{O}$, taki że $\mathcal{O}(D(f)) = R_f$ (z naturalnymi odwzorowaniami restrykcji). Sprawdź, że $\mathcal{O}_p = R_p$ i że $\Gamma(X,\mathcal{O}) = R$.

   Uwagi algebraiczne: R_f i R_p to lokalizacje R w zbiorach $\{f^n \mid n \geq 0\}$ i $R \setminus p$ odpowiednio (znaczy to, nieco wulgaryzując, że elementy owych zbiorów na siłe czynimy odwracalnymi). Przestrzeń X ze snopem $\mathcal{O}$ nazywamy *spektrum* pierścienia R (ozn. $Spec(R)$).
   d*) Uogólnij konstrukcję z c): dla dowolnego R-modułu M opisz snop nad X, taki że M jest jego modułem cięć globalnych, a źdźbłami są lokalizacje M_p.
   e) Możliwie konkretnie opisz spektrum: pierścienia liczb całkowitych; pierścienia wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach zespolonych.