Formy różniczkowe (?), lista 5

$\mathcal{U}, \mathcal{V}$ to otwarte pokrycia X.

1. Wyrachuj, że jeśli $\tau, \tau' \colon J \to I$ są funkcjami wpisującymi pokrycie $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ w pokrycie $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, to
$$(kc)(j_0, \ldots, j_{q-1}) = \sum_{\ell=0}^{q-1} (-1)^\ell c(\tau j_0, \ldots, \tau j_\ell, \tau' j_\ell, \ldots \tau' j_{q-1})|_{V(j_0,\ldots,j_{q-1})}$$
zadaje homotopię łańcuchową między $c(\tau)$ a $c(\tau')$: $dk + kd = c(\tau') - c(\tau)$.
2. Sprawdź, że granica prosta dokładnych ciągów grup abelowych jest ciągiem dokładnym.
3. Precyzyjnie uzasadnij, że jeśli $\alpha \colon F \to \mathcal{F}$ jest naturalnym odwzorowaniem presnopa F w jego usnopienie $\mathcal{F}$ (traktowane jako presnop), to $\mathcal{F}$ jest usnopieniem presnopa $\mathrm{im}(\alpha)$.
4. Udowodnij, że $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^1(X, \mathcal{F})$ jest zawsze różnowartościowe.
5. Udowodnij lemat Leray'a:
Jeśli $\mathcal{U}$ jest acykliczne względem snopa $\mathcal{F}$ (tzn. $H^k(U(i_0, \ldots, i_q), \mathcal{F}) = 0$ dla $k \geq 1$ i $q \geq 0$), to $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^q(X, \mathcal{F})$.
Wsk: Zastosuj technikę kompleksu podwójnego do $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{W}^\bullet)$, gdzie $\mathcal{W}^\bullet$ jest wiotką rezolwentą $\mathcal{F}$.
6. Udowodnij następujący prosty przypadek $\overline{\partial}$-lematu Poincarégo: jeśli g jest gładką funkcją na domknięciu pewnego dysku $D \subset \mathbf{C}$ (tzn. rozszerza się do gładkiej na pewnym trochę większym otwartym dysku), to wzór
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{g(w)}{w - z} dw \wedge d\overline{w}$$
dobrze określa gładką funkcję w D, przy czym $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$.

Ogólniej, $\overline{\partial}$-lemat Poincarégo dla zbioru otwartego $U \subseteq \mathbf{C}^n$ mówi, że dla każdej formy $\omega \in A^{p,q}(U)$ takiej że $\overline{\partial}\omega = 0$ istnieje $\eta \in A^{p,q-1}(U)$ spełniająca $\overline{\partial}\eta = \omega$. Nie dla wszystkich U otwartych $\overline{\partial}$-lemat Poincarégo zachodzi; jest jednak prawdziwy dla produktów dysków i nakłutych dysków (z dopuszczeniem nieskończonego promienia).

7. Używając $\overline{\partial}$-lematu Poincarégo i lematu Leray'a wylicz $H^p(\mathbf{CP}^n, \mathcal{O})$ (co najmniej dla małych p, n). Możesz też spróbować $H^p(\mathbf{CP}^n, \Omega^q)$.
8. Sprawdź porządnie, że opisana na wykładzie odpowiedniość między klasami izomorfizmu $\mathbf{C}$-wiązek nad X a elementami $\check{H}^1(X, \mathcal{A}^*)$ jest dobrze określoną bijekcją. ($\mathcal{A}^*$ oznacza snop gładkich funkcji o wartościach w $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.) Uogólnij.