Formy różniczkowe, lista 7

1. Niech E będzie zespoloną/rzeczywistą wiązką wyposażoną w metrykę hermitowską/euklidesową i zgodną z nią koneksję. Udowodnij, że w otoczeniu każdego punktu x_0 można wybrać ortonormalny reper cięć E tak, by $A(x_0) = 0$, zaś $F(x_0) = dA(x_0)$.
2. Uzasadnij wzory: $c(E \oplus F) = c(E)c(F)$; $c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$; $c_i(E) = \overline{c_i(E)}$.
3. Udowodnij, że $p_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E \otimes \mathbf{C})$.
4. Udowodnij wzór $\mathrm{Pf}(BAB^T) = \mathrm{Pf}(A)\det(B)$.
5. Zespoloną wiązkę E o n-wymiarowych włóknach można potraktować jak zorientowaną wiązkę rzeczywistą o $2n$-wymiarowych włóknach – i policzyć jej klasę Eulera. Uzasadnij, że $e(E) = c_n(E)$.
6. Niech E i F będą zespolonymi wiązkami o włóknach wymiarów n oraz m odpowiednio.
   a) Udowodnij, że jeśli $n = m = 1$, to $c_1(E \otimes F) = c_1(E) + c_1(F)$.
   b) Wyraź $c_1(E \otimes F)$ przez $c_1(E)$, $c_1(F)$, n i m w ogólnym przypadku.
   c) Udowodnij, że jeśli $m = 1$, to $c_k(E \otimes F) = \sum_j \binom{n-j}{k-j} c_j(E) c_1(F)^{k-j}$.
7. Udowodnij, że jeśli E jest zorientowaną rzeczywistą wiązką o włóknach wymiaru $2n$, to $p_n(E) = e(E)^2$.