Formy różniczkowe, lista 8

1. Dla rozmaitości riemannowskiej M^n i form $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$ definiujemy $(\omega, \eta) := \int_M \langle \omega_x, \eta_x \rangle dx$, gdzie dx oznacza formę objętości pochodzącą od metryki Riemanna. Udowodnij, że zachodzi wzór $(d\omega, \theta) = (\omega, d^*\theta)$, gdzie $\omega \in \Omega^k(M)$, $\theta \in \Omega^{k+1}(M)$, $d^* = \pm * d *$. Wyznacz, w zależności od n i k, poprawny znak we wzorze na d^*.
2. Uzasadnij, że działanie $O(V)$ na $\Lambda^k V$ zadaje nieprzywiedlną reprezentację. (V to przestrzeń euklidesowa; wsk.: jedyność niezmienniczego iloczynu skalarnego)
3. Sprawdź, że w $End(\Lambda^2 V)$ zachodzi, dla $F \in O(V)$, równość $*F = \det(F) F *$.
4. Udowodnij, że $c(W) = 0$.
5. Niech U oznacza tautologiczną wiązkę nad $\mathbf{C}P^1$ (tzn. $U_\ell = \ell$). Cięcie tej wiązki można zinterpretować jako funkcję $s\colon \mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}^2$, i 'zwyczajnie' różniczkować. Jeśli wynik tego rożniczkowania zrzutować prostopadle na U, to otrzymamy koneksję na U. Wylicz formę tej koneksji i jej formę krzywizny dla reperu składającego się z jednego cięcia $s([z:1]) = (z, 1)$ określonego nad zbiorem $D_0 = \{[z, w] \in \mathbf{C}P^1 \mid w \neq 0\}$. Jak dużą część $\mathbf{C}P^1$ stanowi zbiór D_0? Oblicz $\int_{\mathbf{C}P^1} c_1(U)$.
6. Oblicz kohomologie $\mathbf{C}P^n$ (np. używając ciągu Mayera–Vietorisa).