Algebra liniowa B2. Lista 10

Na tej liście wszystkie przestrzenie mają skończony wymiar, $F : V \to V$ jest przekształceniem liniowym.

1. Znajdź postacie Jordana i bazy jordanowskie dla macierzy:
$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
2. Znajdź postacie Jordana i bazy jordanowskie dla macierzy z zadania 14 z listy 9.
3. Znajdź postacie Jordana (najlepiej nie wyznaczając baz jordanowskich) dla macierzy:
$$\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}4&-5&7\\1&-4&9\\-4&0&5\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1\\0&1&1&\dots&1\\0&0&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\dots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&1&0&0&\dots&0\\0&0&1&0&\dots&0\\0&0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\dots&\vdots\\0&0&0&0&\dots&1\\1&0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}.$$
4. Rozwiąż równania macierzowe: (a) $M^2 = \left(\begin{smallmatrix}4&1\\0&4\end{smallmatrix}\right)$; (b) $M^2 = \left(\begin{smallmatrix}3&1\\-1&5\end{smallmatrix}\right)$.
5. Podaj przykład macierzy $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$, której żaden wyraz nie jest równy 0, ale $A^3 = 0$.

---

6. Co wiadomo o postaci Jordana zespolonej macierzy A, jeśli: (a) $A^2 = I$; (b) $A^2 = A$; (c) $A^2 = A^3$
7. Znajdź postać Jordana macierzy A, wiedząc że $\chi_A(x) = (3-x)^4(2+x)$, rząd$(A-3I) = 2$. Czy da się to zrobić, jeśli rząd$(A-3I) = 1, 3, 4$?
8. Sprawdź, że każda macierz ortogonalna 3×3 diagonalizuje się nad $\mathbf{C}$.
9. Uzasadnij, że jeśli $V = V^\lambda(F)$, zaś $\dim V_\lambda(F) = 1$, to postacią Jordana F jest pojedyncza klatka Jordana. Używając tego kryterium podaj kilka możliwie skomplikowanych macierzy, których postać Jordana jest pojedynczą klatka Jordana.
10. Niech $F^n = 0$. Pokaż, że rozmiar największej klatki w postaci Jordana F jest równy $\min\{k : F^k = 0\}$.
11. Uzasadnij, że jeśli $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ spełnia $A^{10000} = 0$, to również $A^n = 0$.
12. Z twierdzenia Jordana wywnioskuj, że dla $A \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$ zachodzi $\chi_A(A) = 0$ (por. 9/15).
13. Udowodnij, że jeśli $A \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$, $A^N = I$, to A jest diagonalizowalna, a jej wartości własne są pierwiastkami z jedynki stopnia N.
14. Uzasadnij, że jeśli każde z przekształceń liniowych $F_1, \dots, F_k : V \to V$ jest diagonalizowalne, oraz $(\forall i, j)(F_i \circ F_j = F_j \circ F_i)$, to istnieje baza V, której każdy element jest wektorem własnym każdego z przekształceń F_i. [Komutujące przekształcenia diagonalizowalne diagonalizują się we wspólnej bazie.]
15. Udowodnij, że jeśli A jest zespoloną [rzeczywistą] macierzą kwadratową, to istnieje odwracalna zespolona [rzeczywista] macierz P, taka że $A^\top = PAP^{-1}$.
16. Udowodnij, że jeśli $v \in V^\lambda$, a $(F-\lambda)^k v \neq 0$, to $v, (F-\lambda)v, (F-\lambda)^2 v, \dots, (F-\lambda)^k v$ są lnz.
17. Uzasadnij, że jęśli $F^{k+1}(v) \in \mathrm{Lin}(v, F(v), \dots, F^k(v))$, to $\mathrm{Lin}(v, F(v), \dots, F^k(v))$ jest F-niezmiennicza.

---

18. Załóżmy, że F da się sprowadzić do postaci Jordana. Czy każdy niezerowy wektor z V^λ jest elementem pewnej bazy jordanowskiej F?
19. Wykaż, że dla $A \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$ zachodzi wzór $\det\exp A = e^{\operatorname{tr} A}$. $[\exp A = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}A^n]$
20. Udowodnij, że dowolny endomorfizm zespolonej przestrzeni liniowej można przedstawić w postaci $S + N$, gdzie S, N są liniowe, S jest diagonalizowalne, N jest nilpotentne (tzn. pewna potęga N jest równa 0), oraz $S \circ N = N \circ S$. Czy przedstawienie takie jest jednoznaczne?

K. To zadanie szkicuje inny dowód trochę mocniejszej wersji tw. Jordana. Nie zakładamy, że ciało K jest algebraicznie domknięte. Niech $F : V \to V$, $W = \sum_{\lambda\in\sigma(F)} V^\lambda$,

a) Uzasadnij, że istnieje N takie że $V^\lambda = \ker(F-\lambda)^N$.

b) Uzasadnij, że V^λ jest $(F-\mu)$-niezmiennicza, dla dowolnego $\mu \in K$. Uzasadnij, że jeśli $\mu \neq \lambda$, to $(F-\mu)|_{V^\lambda} : V^\lambda \to V^\lambda$ jest odwracalne.

c) Udowodnij, że przestrzenie V^λ są lnz, i $W = \oplus V^\lambda$. [Wsk. Indukcja. Na równość $\sum v^\lambda = 0$ nałóż $(F-\mu)^N$.]

d) Niech $\overline{F} : V/W \to V/W$ będzie dane przez $\overline{F}(v+W) = F(v)+W$. Udowodnij, że $\overline{F}$ nie ma żadnych wartości własnych (w ciele K). W szczególności, jeśli K jest algebraicznie domknięte, to $V = W = \oplus V^\lambda$. [Wsk. Jeśli $\mu \in \sigma(\overline{F})$, ale $\mu \notin \sigma(F)$, to istnieją $v \notin W$, $w \in W$, takie że $F(v) = \mu v + w$. Ale $(F-\mu)|_W$ jest odwracalne, więc istnieje $w' \in W$, takie że $(F-\mu)w' = w$. Sprawdź, że wtedy $v - w'$ jest wektorem własnym F, z wartością własną μ – sprzeczność. Jak zmodyfikować ten argument, gdy $\mu \in \sigma(F)$?]

e) Udowodnij, że $F|_{V^\lambda}$ ma bazę jordanowską, sprawdzając że metoda szukania bazy jordanowskiej omawiana na wykładzie (na przykładach) działa w pełnej ogólności.

f) Uzasadnij, że $\chi_F(x) = \chi_{F|_W}(x)\chi_{\overline{F}}(x)$. Uzasadnij, że $\chi_{F|_W}(x) = \Pi_{\lambda\in\sigma(F)}(\lambda-x)^{\dim V^\lambda}$. Udowodnij, że jeśli $\chi_F(x) = P(x)\Pi_{\lambda\in\sigma(F)}(\lambda-x)^{n_\lambda}$, gdzie $P(x)$ nie ma pierwiastków w K, to $\chi_{\overline{F}}(x) = P(x)$, zaś $n_\lambda = \dim V^\lambda$.