Algebra liniowa B2. Lista 11

Q jest zwykle formą kwadratową na skończenie wymiarowej przestrzeni V. Wektor $v \in V$ nazywamy *izotropowym,* jeśli $Q(v) = 0$. Zakładamy, że $1 + 1 \neq 0$.

1. Znajdź $m^{BB}(Q)$: $Q((x,y,z)^\top) = x^2 + 5xy + 3yz + yx - 2z^2$, $B = ((1,0,1)^\top, (-1,-1,1)^\top, (0,1,3)^\top)$.
2. Podaj przykład formy kwadratowej Q na pewnej przestrzeni V oraz dwóch wektorów izotropowych $v, w \in V$, takich że $Q(v + w) \neq 0$.
3. Czy (a) suma; (b) różnica; (c) iloczyn form kwadratowych (określonych na tej samej przestrzeni) jest formą kwadratową?
4. Uzasadnij, że obcięcie formy kwadratowej do podprzestrzeni jest formą kwadratową.
5. Uzasadnij, że jeśli $F : W \to V$ jest liniowe, zaś $Q : V \to K$ jest formą kwadratową, to $Q \circ F : W \to K$ jest formą kwadratową.
6. Metodą Lagrange'a sprowadź do postaci diagonalnej formy $x_1x_2 + x_2^2$, $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$.
7. Wyznacz symetryczną formę dwuliniową związaną z formą kwadratową $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
8. Które z poniższych funkcji są formami dwuliniowymi na odpowiednich przestrzeniach liniowych? Które są ponadto symetryczne? Napisz ich macierze w wybranych przez siebie bazach. Zbadaj dodatnią określoność (w przypadkach, gdy ma ona sens). (a) $\Phi(x,y) = x^\top y$ ($\Phi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$); $\Phi : M_{n\times n}(\mathbf{R}) \times M_{n\times n}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$: (b) $\Phi(A,B) = \operatorname{tr}(AB)$, (c) $\Phi(A,B) = \det(AB)$, (d) $\Phi(A,B) = \operatorname{tr}(AB^\top)$, (e) $\Phi(A,B) = \operatorname{tr}(A + B)$; $\Phi : \mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}$: (f) $\Phi(P_1,P_2) = \int_0^1 P_1(x)P_2(x)dx$, (g) $\Phi(P_1,P_2) = P_1(2)P_2(1)$.
9. Załóżmy, że funkcja $Q : V \to K$ spełnia warunki: (a) $(v,w) \mapsto \frac{1}{2}(Q(v+W) - Q(v) - Q(w))$ jest formą dwuliniową; (b) $(\forall v \in V)(Q(-v) = Q(v)$. Udowodnij, że Q jest formą kwadratową. Czy warunek (b) jest istotny?
10. Uzasadnij, że każda forma kwadratowa na przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbf{C}$ ma w odpowiednio dobranym liniowym układzie współrzędnych postać $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2$ (dla pewnego k nie większego niż wymiar przestrzeni i zależącego od formy).
11. Oblicz exponens macierzy: $\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a+bi & 1 \\ 0 & a+bi \end{pmatrix}$. Porównaj wyniki. $[a, b \in \mathbf{R}]$
12. Mówimy, że podzbiór $W \subseteq V$ zespolonej przestrzeni liniowej V jest jej rzeczywistą podprzestrzenią (liniową), jeśli jest niepusty oraz zamknięty na dodawanie i mnożenie przez skalary rzeczywiste. Taki podzbiór jest wtedy rzeczywistą przestrzenią liniową. [Przykłady: $\mathbf{R}^2 \subseteq \mathbf{C}^2$, $\{\binom{x}{iy} : x, y \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{C}^2$, $W \subseteq W_{\mathbf{C}}$.] Niech W będzie rzeczywistą podprzestrzenią zespolonej przestrzeni liniowej V. Uzasadnij, że włożenie $W \to V$ rozszerza się jednoznacznie do zespolonego odwzorowania liniowego $W_{\mathbf{C}} \to V$. Interesujące jest, czy to rozszerzenie jest izomorfizmem [wtedy można z sensem (choć trochę nadużywając terminologii) powiedzieć, że V jest kompleksyfikacją W]. Sformułuj warunek na W gwarantujący, że tak jest. Podaj kilka przykładów rzeczywistych podprzestrzeni $\mathbf{C}^2$ takich że $\mathbf{C}^2$ (a) jest, (b) nie jest ich kompleksyfikacją.
13. Uzasadnij, że symetryczne macierze 2×2 o wyrazach rzeczywistych tworzą przestrzeń liniową. Jaki jest jej wymiar? Zidentyfikuj i naszkicuj podzbiór tej przestrzeni składający się z macierzy dodatnio określonych.
14. Udowodnij lub obal: (a) Jeśli macierz 3×3 ma wszystkie wyrazy dodatnie, to jest dodatnio określona; (b) suma macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona; (c) iloczyn macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określony.
15. Dla jakich wartości λ następujące formy są dodatnio określone: $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$; $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$; $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$; $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$;
16. Uzasadnij, że forma kwadratowa jest dodatnio półokreślona [dodatnio określona] wtedy i tylko wtedy, gdy jej macierz da się zapisać w postaci $B^\top B$ dla pewnej macierzy B [, gdzie B jest kwadratową macierzą odwracalną]. (Wsk. diagonalizacja)
17. Załóżmy, że zbiór wektorów izotropowych jest podprzestrzenią. Wykaż, że wtedy (a) Q jest półokreślona; (b) jeśli $v, w \in V$, przy czym v jest wektorem izotropowym, to $Q(v,w) = 0$.
18. Niech Q będzie formą kwadratową na przestrzeni $R_n[X]$. Czy istnieje $W \in \mathbf{R}_n[X]$, taki że dla każdego $P \in \mathbf{R}_n[X]$ zachodzi $Q(P) = \int_0^1 P(x)^2W(x)dx$?

K. Ze skończonym grafem (niezorientowanym, bez krawędzi wielokrotnych, bez pętli), wiążemy macierz (a_{ij}): numerujemy wierzchołki grafu i kładziemy $a_{ij} = -1$ jeśli i-ty i j-ty wierzchołek są połączone krawędzią, $a_{ij} = 0$ jeśli nie są, oraz $a_{ii} = 2$ dla każdego i. Znajdź wszystkie grafy dla których dostaje się dodatnio określoną macierz.