Algebra liniowa B2. Lista 12

W zadaniach o formach kwadratowych zakładamy, że jesteśmy w skończenie wymiarowej rzeczywistej przestrzeni liniowej. W pozostałych zadaniach rzecz dzieje się w $\mathbf{R}^n$ (ze standardowym iloczynem skalarnym) lub w skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej V, chyba że treść zadania mówi inaczej.

1. Uzupełnij do bazy ortogonalnej: (a) $\{(1,-2,2,-3)^\top, (2,-3,2,4)^\top\}$; (b) $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^\top, (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^\top\}$.
2. Znajdź ortogonalną bazę podprzestrzeni (a) $\mathrm{Lin}((1,2,2,-1)^\top, (1,1,-5,3)^\top, (3,2,8,-7)^\top)$; (b) $\mathrm{Lin}((2,1,3,-1)^\top, (7,4,3,-3)^\top, (1,1,-6,0)^\top, (5,7,7,8)^\top)$.
3. Wyznacz bazę $\mathrm{Lin}((1,0,2,1)^\top, (2,1,2,3)^\top, (0,1,-2,1)^\top)^\perp$.
4. Znajdź rzut prostopadły wektora $(5,2,-2,2)$ na $W = \mathrm{Lin}((2,1,1,-1)^\top, (1,1,3,0)^\top, (1,2,8,1)^\top)$ i na $W^\perp$.
5. Zadaj układem równań dopełnienie ortogonalne przestrzeni zadanej układem $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0 \end{cases}$
6. Wyznacz odległość punktu $(3,3,-4,2)^\top$ od podprzestrzeni zadanej układem równań $x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$, $x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$.
7. Napisz w bazie standardowej macierz rzutu prostopadłego na podprzestrzeń zadaną równaniem $x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$.
8. $(b_1, \ldots, b_n)$ – baza ON przestrzeni V, $x \in V$. Udowodnij, że (a) $x = \sum_{i=1}^n \langle x, b_i\rangle b_i$; (b) $|x|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, b_i\rangle|^2$.

---

9. Mówimy, że forma kwadratowa Q jest *niezdegenerowana,* jeśli $\det(m^{BB}(Q)) \neq 0$. Uzasadnij, że pojęcie to jest dobrze zdefiniowane [nieznikanie wyznacznika nie zależy od wyboru bazy B]. Uzasadnij, że Q jest niezdegenerowana $\iff (\forall v \in V \setminus \{0\})(\exists w \in V)(Q(v,w) \neq 0)$.
10. Znajdź sygnaturę formy: $x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$; $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$; $2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$; $2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;
11. Podaj kryterium ujemnej określoności macierzy analogiczne do kryterium Sylvestera.
12. Czy jest prawdą, że macierz jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej minory główne są nieujemne?
13. Które z funkcji Φ z zadania 8 z listy 11 są iloczynami skalarnymi?
14. Udowdnij, że dla dowolnych $x, y \in V$ zachodzi (a) $|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|$; (b) $|x+y| \leq |x| + |y|$.
15. Rozważmy przestrzeń $\mathbf{R}_3[X]$ z iloczynem skalarnym $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$. Zastosuj proces Grama–Schmidta do układu $(1, X, X^2)$. Znajdź odległość X^3 od podprzestrzeni $\mathbf{R}_2[X]$.
16. Udowodnij lub obal (W, U, Z to dowolne podprzestrzenie, zaś A, B – dowolne podzbiory V): (a) $(W+U)^\perp = W^\perp \cap U^\perp$; (b) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$; (c) $(W \cup U)^\perp = W^\perp \cup U^\perp$; (d) $[A = (A^\perp)^\perp] \Rightarrow A < V$; (e) $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$.
17. Uzasadnij, że każdy ortogonalny układ niezerowych wektorów jest liniowo niezależny.
18. Uzasadnij, że każdy ortonormalny układ wektorów można uzupełnić do bazy ortonormalnej.
19. Niech $W, U < V$. Czy jest prawdą, że (a) $P_W \circ P_U = P_{W\cap U}$? (b) $P_W + P_{W^\perp} = Id$?
20. Niech $W < V$, zaś B niech będzie bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej V. Udowodnij, że każdy wyraz macierzy $m_B^B(P_W)$ jest co do modułu nie większy niż 1.
21. Wykaż, że suma kwadratów długości rzutów wektorów dowolnej bazy ortonormalnej na k-wymiarową podprzestrzeń jest równa k.
22. Uzasadnij, że jeśli W, U są podprzestrzeniami przestrzeni euklidesowej V, zaś $x \in w+W$, $y \in u+U$ punktami, to $d(x,y) = \min\{d(a,b) : a \in w+W, b \in u+U\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y \perp W$ i $x - y \perp U$.
23. Niech W, U będą podprzestrzeniami V. Niech $Z = (W+U)^\perp$, $x \in w+W$, $y \in u+U$. Uzasadnij, że odległość zbiorów $w+W$, $u+U$ wynosi $|P_Z(x-y)|$. (Odległość zbiorów A, B to $\inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$; w razie kłopotów załóż, że w naszym przypadku to infimum jest realizowane przez pewną parę punktów.) Oblicz odległość zbioru rozwiązań układu $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$ od zbioru $(0,2,6,-5)^\top + \mathrm{Lin}((-7,1,1,1)^\top, (-10,1,2,3)^\top)$.

---

24. Niech Q będzie formą kwadratową na przestrzeni wymiaru n, zaś A macierzą Q w pewnej bazie. Załóżmy, że minory główne $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ są wszystkie niezerowe. Niech s oznacza liczbę zmian znaku w ciągu $1, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Udowodnij, że sygnatura Q to $(n-s, s)$. [Wsk. zaadaptuj dowód kryterium Sylvestera.]
25. Formy kwadratowe Q, Q' na przestrzeni liniowej V nazywamy *liniowo równoważnymi,* jeśli istnieje odwracalne przekształcenie liniowe $F : V \to V$, takie że $Q' = Q \circ F$. Uzasadnij, że Q, Q' są liniowo równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą sygnaturę.
26. Jaki jest maksymalny możliwy wymiar izotropowej podprzestrzeni (tzn. podprzestrzeni, której każdy wektor jest izotropowy) w przestrzeni liniowej wymiaru n z formą kwadratową sygnatury (p,q)?
27. W przestrzeni $C[0,1]$ funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ wyznacz dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni $\{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$.