Algebra liniowa B2. Lista 2

1. Wyznacz (pewną) bazę i wymiar następujących podprzestrzeni $\mathbf{R}^3$:
 a) $\mathrm{Lin}(\{(1,0,0)^\top,(0,1,0)^\top,(1,1,0)^\top\})$
 b) $\mathrm{Lin}(\{(2,0,1)^\top,(3,1,0)^\top,(2,-1,3)^\top,(4,1,0)^\top\})$
 c) $\mathrm{Lin}(\{(2,0,1)^\top,(0,1,0)^\top,(1,-1,0)^\top\})$
 d) $\mathrm{Lin}(\{(1,0,3)^\top,(-1,1,2)^\top,(2,-1,1)^\top\})$
 e) $\mathrm{Lin}(\{(2,0,1)^\top,(-6,0,3)^\top\})$
 f) $\mathrm{Lin}(\{(1,n,0)^\top : n\in\mathbf{N}\})$
 g) $\mathrm{Lin}(\{(1,0,2)^\top,(0,-1,1)^\top\})\cap\mathrm{Lin}(\{(1,0,3)^\top,(0,1,1)^\top\})$
 h) $\mathrm{Lin}(\{(0,1,2)^\top,(0,-1,1)^\top\})+\mathrm{Lin}(\{(0,0,1)^\top\})$
 i) $\mathrm{Lin}(\{(1,0,1)^\top\})+\mathrm{Lin}(\{(0,1,1)^\top\})+\mathrm{Lin}(\{(1,-1,0)^\top\})$
 j) $\mathrm{Lin}(\{(1,2,0)^\top,(0,3,1)^\top\})\cap\mathrm{Lin}(\{(1,5,1)^\top,(1,-1,-1)^\top\})$
2. Wskaż bazę $\mathbf{R}_3[X]$ do której należą wielomiany $1+X^2, 1+2X+X^3$.
3. Udowodnij, że (a) przekształcenie identycznościowe jest izomorfizmem liniowym; (b) przekształcenie odwrotne do izomorfizmu liniowego jest izomorfizmem liniowym; (c) złożenie izomorfizmów liniowych jest izomorfizmem liniowym. Sformułuj konkluzję tego zadania używając słowa "relacja".
4. Niech B, C będą bazami V, W odpowiednio, zaś $\varphi : B \to C$ bijekcją. Sprawdź, że $F : V \to W$ zadane przez $F(\sum_{b\in B} t_b b) = \sum_{b\in B} t_b\varphi(b)$ jest izomorfizmem liniowym.
5. Podaj przykład 4-elementowego podzbioru $\mathbf{R}^3$, w którym zawarte są jedynie 3 bazy $\mathbf{R}^3$.
6. Stosując algorytm Steiniza dokonaj wymiany dla bazy $(1,0,0)^\top,(1,1,0)^\top,(1,1,1)^\top$ i liniowo niezależnego podzbioru $(0,0,1)^\top,(0,1,1)^\top$ przestrzeni $\mathbf{R}^3$
7. Uzasadnij, że jeśli $(b_1,\ldots,b_n)$ jest bazą V zaś $a = 0\cdot b_1 + \sum_{i=2}^n t_i b_i$, to $(a, b_2, \ldots, b_n)$ nie jest bazą V.
8. Podaj przykład dwóch baz (a_1,a_2,a_3) i (b_1,b_2,b_3) przestrzeni $\mathbf{R}^3$, takich że (a_1,b_2,b_3) jest bazą $\mathbf{R}^3$, ale (b_1,a_2,a_3) nie jest bazą $\mathbf{R}^3$.
9. Wyznacz bazę i wymiar $\mathrm{Lin}(A)$ dla: a) $A=\{(1,0,0,-1)^\top,(2,1,1,0)^\top,(1,1,1,1)^\top,(1,2,3,4)^\top,(0,1,2,3)^\top\}$; b) $A=\{(1,1,1,1,0)^\top,(1,1,-1,-1,-1)^\top,(2,2,0,0,-1)^\top,(1,1,5,5,2)^\top,(1,-1,-1,0,0)^\top\}$.
10. Flagą w przestrzeni liniowej V nazywamy ciąg $(V_0,V_1,\ldots,V_k)$ podprzestrzeni V, taki że $V_i < V_{i+1}$, $V_i \neq V_{i+1}$. Udowodnij, że wymiar V jest o 1 mniejszy od maksymalnej możliwej długości flagi w V. (Zakładamy, że wymiar V jest skończony.)
11. a) Znajdź $P\in\mathbf{R}_5[X]$, takie że $P'(-1)\neq 0$.
 b) Znajdź $P\in\mathbf{R}_5[X]$, takie że $P'(-1)=0$, ale $P(2)\neq 0$.
 c) Znajdź $P\in\mathbf{R}_5[X]$, takie że $P'(-1)=P(2)=0$, ale $P'''(0)\neq 0$.
 d) Wywnioskuj, że $\dim\{P\in\mathbf{R}_5[X] : P'(-1)=P(2)=P'''(0)=0\}\leq 3$.
12. Napisz jawnym wzorem izomorfizm $F:\mathbf{R}^3\to V$, dla (a) $V=\{(x,y,z,t)^\top\in\mathbf{R}^4 : x+2y+z+3t=0\}$; (b) $V=\{P\in\mathbf{R}_4[X] : P''(0)=P(1)=0\}$. W przypadku b) oblicz $F^{-1}(X-X^3)$.
13. Znajdź wymiar przestrzeni $\{P\in\mathbf{R}_3[X] : P(1)=P(-1)=2P(0)+P''(0)=0\}$.
14. Uzasadnij, że $\dim\mathrm{Lin}(B)\leq|B|$. Czy prawdą jest, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy B jest lnz?
15. Czy prawdą jest, że jeśli $B=(b,b_2,b_3)$ i $C=(c,b_2,b_3)$ są bazami $\mathbf{R}_2[X]$, to dla dowolnego $P\in\mathbf{R}_2[X]$ wektory $[P]_B$ i $[P]_C$ mogą się różnić tylko pierwszą współrzędną?
16. Załóżmy, że $W<V$, $\dim W=5$, $\dim V=7$. Jaka jest maksymalna możliwa liczba elementów liniowo niezależnego podzbioru $V\backslash W$? (Jeśli masz kłopoty, spróbuj najpierw dla mniejszych wymiarów.)
17. Uzasadnij, że jeśli V i W są podprzestrzeniami pewnej (skończenie wymiarowej) przestrzeni liniowej, przy czym $V\cap W=\{0\}$, to $\dim(V+W)=\dim(V)+\dim(W)$.
18. Czy jest prawdą, że w dowolnej przestrzeni liniowej, dla dowolnych jej podprzestrzeni liniowych U, V, W zachodzi $U\cap(V+W)=U\cap V+U\cap W$?
19. Sprawdź, czy są liniowo niezależne następujące podzbiory przestrzeni funkcji z $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$: a) $\{\sin x,\cos x\}$; b) $\{1,x,x^2,x^3\}$; c) $\{1,\cos(2x),\cos^2 x\}$; d) $\{1,\sin x,\cos x,\sin(2x),\cos(2x)\}$.
20. Oblicz $\dim\{(a_n)_{n=0}^\infty : (\forall n\geq 0)(a_{n+3}=3a_{n+1}+2a_n)\}$.
21. Uzasadnij, że jeśli V i W są podprzestrzeniami pewnej (skończenie wymiarowej) przestrzeni liniowej, to $\dim(V+W)=\dim(V)+\dim(W)-\dim(V\cap W)$. (wsk. Wybierz bazę $V\cap W$; uzupełnij ją do bazy V; uzupełnij ją też do bazy W. Sprawdź, że wszystkie otrzymane w ten sposób wektory łącznie stanowią bazę $V+W$.)

K.1 Uzasadnij, że jeśli przestrzeń liniowa ma bazę nieskończoną, to każde dwie jej bazy są równoliczne. (Wsk. każdy wektor jednej bazy jest kombinacją liniową *skończenie wielu* wektorów drugiej bazy.)

K.2 Uzasadnij, że liczba elementów skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem m-elementowym jest potęgą liczby m. Wywnioskuj stąd, że liczba elementów ciała skończonego zawsze jest potęgą pewnej liczby pierwszej.