Algebra liniowa B2. Lista 14

Wszystko dzieje się przestrzeni euklidesowej/unitarnej V, chyba że treść zadania mówi inaczej; $T : V \to V$ jest przekształceniem liniowym. Przekształcenie samosprzężone T nazywamy *nieujemnie określonym,* jeśli $(\forall v \in V)(\langle Tv, v\rangle \geq 0)$ (a *dodatnio określonym,* jeśli dla niezerowych v nierówność jest ostra). Definiujemy *normę* przekształcenia liniowego S wzorem $\|S\| = \sup\{\|Sv\|/\|v\| : v \in V, v \neq 0\}$.

1. Uzasadnij, że jeśli B, C są ortonormalnymi bazami V, to $m_B^C(Id)$ jest macierzą unitarną/ortogonalną.
2. Zdiagonalizuj w bazie ortonormalnej macierze:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
3. Zdiagonalizuj formy kwadratowe w bazie ortonormalnej. (Znajdź bazę ortonormalną w której forma jest diagonalna, i postać formy we współrzędnych związanych z tą bazą; wyjaśnij jak zamieniać te lepsze współrzędne na standardowe, i odwrotnie. Formy są określone na $\mathbf{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym i podane w standardowych współrzędnych) (a) $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$; (b) $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^4 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$; (c) $4x_1^2 - 4x_2^2 - 8x_2x_3 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + 6x_4x_5 + 3x_5^2$.
4. Niech $C = (b_1, b_1 + b_2)$, gdzie $B = (b_1, b_2)$ jest bazą ortonormalną V; niech $m_B^B(T) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Znajdź $m_C^C(T^*)$.
5. Czy jest prawdą, że $\|F_A\|$ jest równa maksymalnej długości kolumny A?
6. Uzasadnij, że $\|S\| = \sup\{\|Sv\| : v \in V, \|v\| \leq 1\} = \sqrt{\sup\{\langle S^*Sv, v\rangle : v \in V, \|v\| \leq 1\}}$.
7. Używając zadań 6 i 16 (lub inaczej) oblicz (lub oszacuj z góry z dokładnością 0,1) normy przekształceń $\mathbf{R}^n$ zadanych macierzami:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

---

8. Udowodnij, że (a) $(T^*)^* = T$; (b) $(T + S)^* = T^* + S^*$; (c) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$; (d) $\ker(T^*) = \operatorname{Im}(T)^\perp$; (e) $\operatorname{Im}(T^*) = \ker(T)^\perp$.
9. Niech $T = T^*$. Udowodnij, że wektory własne T odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe.
10. Udowodnij, że jeśli $U : V \to V$ jest przekształceniem unitarnym, zaś $T = T^*$, to UTU^{-1} jest samosprzężone.
11. (V rzeczywista) Uzasadnij, że przyporządkowanie $T \mapsto (v \mapsto \langle Tv, v\rangle)$ określa wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między przekształceniami samosprzężonymi V a formami kwadratowymi na V.
12. Które przekształcenia ortogonalne są samosprzężone?
13. Podaj przykład dwóch form kwadratowych które nie diagonalizują się we wspólnej bazie.
14. Niech $T = T^*$. Udowodnij, że T jest nieujemnie określone wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$.
15. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią euklidesową. Udowodnij, że każdy $f \in V^*$ jest postaci $\langle \cdot, y\rangle$ (dla pewnego $y \in V$), rozważając odwzorowanie $V \ni y \mapsto \langle \cdot, y\rangle \in V^*$. (Wsk. pokaż, że to odwzorowanie jest liniowe i różnowartościowe – wywnioskuj, że jest na. Czy ten argument działa dla przestrzeni zespolonych?)
16. Udowodnij, że jeśli $T = T^*$, to $\|T\| = \sup\{\langle Tx, x\rangle : x \in V, \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.
17. Niech T będzie rzutem (tzn. niech spełnia $T^2 = T$ – wyjaśnij skąd nazwa). Udowodnij, że następujące warunki są równoważne: (a) $T = T^*$; (b) $TT^* = T^*T$; (c) $\operatorname{Im}(T) = (\ker(T))^\perp$.

---

18. (V zespolona) Udowodnij, że jeśli $(\forall v \in V)(\langle Tv, v\rangle = 0)$, to $T = 0$. Czy jest to prawdą również w przypadku rzeczywistym?
19. (V rzeczywista, wymiaru n) Niech $Q(v) = \langle Tv, v\rangle$ będzie formą kwadratową na V, zaś $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n$ niech będą wartościami własnymi samosprzężonego przekształcenia T.

a) Wykaż, że $r_i = \inf\{\sup\{\langle Tv, v\rangle : v \in U, \|v\| \leq 1\} : U < V, \dim(U) = i\} = \sup\{\inf\{\langle Tv, v\rangle : v \in U, \|v\| \leq 1\} : U < V, \dim(U) = n - i + 1\}$.

b) Załóżmy, że Q jest dodatnio określona. Niech $W < V$ będzie podprzestrzenią wymiaru $n - 1$; $Q|_W$ jest postaci $\langle Sw, w\rangle$ dla pewnego samosprzężonego $S : W \to W$; niech $r_1' \leq r_2' \leq \ldots \leq r_{n-1}'$ będą wartościami własnymi S. Wykaż, że $r_1 \leq r_1' \leq r_2 \leq r_2' \leq r_3 \leq \ldots \leq r_{n-1}' \leq r_n$.

c) Elipsoidę w $\mathbf{R}^3$ przekrojono płaszczyzną przechodzącą przez jej środek symetrii; przekrój jest elipsą. Jak mają się długości półosi tej elipsy do długości półosi elipsoidy?

20. (V zespolona) Przekształcenie T nazywamy *normalnym,* jeśli $TT^* = T^*T$. Udowodnij, że przekształcenie normalne diagonalizuje się w bazie ortonormalnej.

Algebra liniowa B2. Lista 15

1. Znajdź pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $(1,5,2,1,3)^\top, (-1,4,2,-2,0)^\top$, oraz objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $(1,2,3,4)^\top, (1,-1,0,1)^\top, (0,1,1,-1)^\top$.
2. Znajdź odległość punktu $(1,2,3,4)^\top$ od płaszczyzny $Lin(\{(1,-1,1,-1)^\top, (0,1,2,-1)^\top\})$.
3. Oblicz n-wymiarową objętość równoległościanu rozpiętego przez n wektorów:

a) $(1,-1,1,-1)^\top, (1,1,1,1)^\top, (1,0,-1,0)^\top, (0,1,0,-1)^\top$;

b) $(1,0,0,2,5)^\top, (0,1,0,3,4)^\top, (0,0,1,4,7)^\top, (2,-3,4,11,12)^\top, (0,0,0,0,1)^\top$.

4. Oblicz kąt między główną przekątną n-wymiarowej kostki foremnej a jej k-wymiarową ścianą.
5. Znajdź rozkłady biegunowe przekształceń $\mathbf{R}^n$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

---

6. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

a) istnieje liniowo niezależny układ wektorów w $\mathbf{R}^n$ którego macierzą Grama jest A;

b) istnieje iloczyn skalarny na $\mathbf{R}^n$, taki że macierzą Grama bazy standardowej względem tego iloczynu skalarnego jest A.

7. Udowodnij, że symetryczna macierz $M \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ (a) jest macierzą Grama pewnego liniowo niezależnego układu n wektorów w $\mathbf{R}^n$, wtedy i tylko wtedy, gdy jest dodatnio określona; (b) jest macierzą Grama pewnego układu n wektorów w $\mathbf{R}^n$, wtedy i tylko wtedy, gdy jest dodatnio półokreślona.
8. Czy istnieje iloczyn skalarny na $\mathbf{R}^3$, taki że cosinusy kątów między wektorami E_1, E_2, E_3, wynoszą $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$?
9. Czy istnieją punkty a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 w $\mathbf{R}^n$ (dla pewnego n), takie że macierzą odległości $(d(a_i, a_j))$ jest macierz $\begin{pmatrix} 0 & 3 & \sqrt{5} & \sqrt{5} & 2\sqrt{2} \\ 3 & 0 & \sqrt{14} & \sqrt{14} & \sqrt{17} \\ \sqrt{5} & \sqrt{14} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{17} \\ \sqrt{5} & \sqrt{14} & \sqrt{2} & 0 & 3 \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{17} & \sqrt{17} & 3 & 0 \end{pmatrix}$? Jeśli tak, to znajdź najmniejsze możliwe n.
10. Udowodnij, że dla $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ zachodzi nierówność (Hadamarda) $(\det(A))^2 \le \Pi_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)$.
11. (V zespolona – uwaga na sprzężenia) Dla dowolnych $x, y \in V$ wyraź $\|x+iy\|^2$, $\|x-iy\|^2$, $\|x+y\|^2$ oraz $\|x-y\|^2$ w terminach $\langle x,x\rangle$, $\langle x,y\rangle$, $\langle y,x\rangle$, $\langle y,y\rangle$. Następnie wyraź $\langle x,y\rangle$ jako kombinację liniową pierwszych czterech wyrażeń. Z otrzymanego wzoru polaryzacyjnego wywnioskuj, że przekształcenie liniowe $F: V \to V$ zachowujące długości wektorów jest unitarne. Czy założenie liniowości jest istotne?
12. (V zespolona, $A, B : V \to V$ liniowe)

a) Uzasadnij, że jeśli A jest unitarne a 1 nie jest jego wartością własną, to $B = i(A - Id)^{-1}(A + Id)$ jest samosprzężone.

b) Uzasadnij, że jeśli B jest samosprzężone, to $A = (B - iId)^{-1}(B + iId)$ jest unitarne.

13. Uzasadnij, że $V = \{M \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}) : M = M^\top\}$ jest liniową podprzestrzenią $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$, a funkcja $Q : V \to \mathbf{R}$ zadana wzorem $Q(M) = \det(M)$ jest formą kwadratową na niej. Oblicz sygnaturę tej formy. Znajdź bazę w której Q jest diagonalna. Sprawdź, że jeśli P jest macierzą rzeczywistą o wyznaczniku 1, to funkcja $M \mapsto PMP^\top$ jest liniowym przekształceniem V zachowującym formę Q.
14. Uzasadnij, że przemienne przekształcenia samosprzężone diagonalizują się we wspólnej bazie ortonormalnej.

---

15. Wykaż, że objętość równoległościanu spełnia $V(a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_l) \le V(a_1,\dots,a_k)V(b_1,\dots,b_l)$.
16. Wykaż, że jeśli układ k wektorów w n wymiarowej rzeczywistej przestrzeni euklidesowej ma tę własność, że każde dwa z nich tworzą kąt rozwarty, to $k \le n+1$.
17. Uzasadnij, że w $\mathbf{R}_n[X]$ z iloczynem skalarnym $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$ odległość X^n od $\mathrm{Lin}\{1, X, \dots, X^{n-1}\}$ wynosi $\left(\binom{2n}{n}\sqrt{2n+1}\right)^{-1}$.
18. (V zespolona) Uzasadnij, że każde przekształcenie liniowe $V \to V$ jest kombinacją liniową czterech przekształceń unitarnych.
19. W przestrzeni funkcji gładkich (nieskończenie wiele razy różniczkowalnych) o okresie 2π z iloczynem skalarnym $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ rozpatrzmy przekształcenie liniowe $\Delta(f) = -f''$. Uzasadnij, że Δ jest przekształceniem samosprzężonym i nieujemnie określonym. Znajdź możliwie dużo wektorów własnych Δ i sprawdź bezpośrednim rachunkiem ich ortogonalność.
20. Weź dowolny podręcznik analizy funkcjonalnej (W.Rudin, Analiza funkcjonalna), znajdź rozdział o operatorach na przestrzeni Hilberta i samodzielnie udowodnij omawiane w nim fakty (zakładając że przestrzeń ma skończony wymiar).