Algebra liniowa B2. Lista $3\frac{1}{2}$

Kartkówki (po 3 pkt.): 3,10,17,24,31.III, 7,28.IV, 12,19,26.V.
Kolokwia (po 30 pkt.): 10.IV, 29.V.
Dokładne zasady zaliczania ćwiczeń ustali prowadzący ćwiczenia.
Uzyskanie 45 pkt. z kartkowek i kolokwiów gwarantuje otrzymanie zaliczenia.
Egzamin: 28.VI.2006, 10-14, sala HS.

1. Uzasadnij, że każda podprzestrzeń przestrzeni liniowej V jest (a) jądrem pewnego przekształcenia liniowego, którego dziedziną jest V; (b) obrazem pewnego przekształcenia liniowego, którego przeciwdziedziną jest V.
2. Niech $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in (\mathbf{R}^3)^*$ będą dane wzorami $\phi_1((x,y,z)^\top) = x+2y-z$, $\phi_2((x,y,z)^\top) = y+z$, $\phi_3((x,y,z)^\top) = -x+y+2z$. Uzasadnij, że (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) jest bazą $(\mathbf{R}^3)^*$; znajdź dualną do niej bazę $\mathbf{R}^3$.
3. Udowodnij, że jeśli $(v_1^*, \ldots, v_k^*)$ jest bazą dualną do bazy $B = (v_1, \ldots, v_k)$ przestrzeni V, to dla każdego $v \in V$ mamy $[v]_B = (v_1^*(v), \ldots, v_k^*(v))^\top$.
4. Niech $a(t) \in \mathbf{R}[t]$ będzie ustalonym wielomianem. Które z następujących funkcji są funkcjonałami liniowymi na $\mathbf{R}_n[t]$: (a) $f(P) = \int_{-1}^1 a(t)P(t)dt$; (b) $f(P) = \int_0^1 a(t)P(t^2)dt$; (c) $f(P) = \int_0^1 a(t)[P(t)]^2dt$; (d) $f(P) = P'''(-1)$; (e) $f(P) = P(1)P'(-1)$.
5. Niech $V = \mathbf{R}[X]$, $W = \{P \in V : P(0) = 0\}$. Uzasadnij, że jeśli Q i S należą do tej samej warstwy W, to $Q(0) = S(0)$. Czy jest też odwrotnie? Uzasadnij, że w każdej warstwie W jest dokładnie jeden wielomian stopnia 0. Wyznacz $\dim(V/W)$.

---

6. Niech $V = \{(x,y,z)^\top \in \mathbf{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$, $W = \{(x,y,z)^\top \in \mathbf{R}^3 : x = \frac{y}{3} = -\frac{z}{7}\}$. Wykaż, że (a) odwzorowanie $V \times W \ni (v,w) \mapsto v + w \in \mathbf{R}^3$ nie jest izomorfizmem; (b) $V \times W \simeq \mathbf{R}^3$.
7. Niech $W, U < V$. Uzasadnij, że jeśli $W \cap U = \{0\}$, to odzorowanie $W \times U \to W + U$ zadane wzorem $(w,u) \mapsto w + u$ jest izomorfizmem liniowym.
8. Niech $F : V \to W$ będzie funkcją. Udowodnij, że F jest liniowa $\iff$ $F < V \times W$.
9. Niech $v = (1,2,3)^\top$. Opisz zbiór wszystkich $f \in (\mathbf{R}^3)^*$, takich że $f(v) = -1$. (Np. określ jak rozpoznać, czy f spełnia $f(v) = -1$, znając współrzędne f w bazie E_1^*, E_2^*, E_3^*.)
10. Niech v_1, v_2, v_3 oraz w_1, w_2, w_3 będą bazami $\mathbf{R}^3$, zaś v_1^*, v_2^*, v_3^* oraz w_1^*, w_2^*, w_3^* bazami $(\mathbf{R}^3)^*$ do nich dualnymi. Przypuśćmy, że $v_2 = w_2$ oraz $v_3 = w_3$. Czy koniecznie musi być tak, że $v_2^* = w_2^*$ i $v_3^* = w_3^*$?
11. Niech $W < V$, $\dim(V) < \infty$, $f \in W^*$. Uzasadnij, że istnieje $F \in V^*$, takie że $F|_W = f$.
12. Uzasadnij, że jeśli $\dim(V) < \infty$, $W < V$, $v \in V \setminus W$, to istnieje $f \in V^*$, takie że $f|_W = 0$, ale $f(v) \neq 0$.
13. Niech $V = \mathbf{R}^3$, zaś W niech będzie prostą w $\mathbf{R}^3$ zadaną równaniem $x = \frac{y}{3} = -z$.
 a) Sprawdź, czy wektory $v_1 + W$, $v_2 + W$ są lnz w V/W, dla (i) $v_1 = (1,2,3)^\top$, $v_2 = (4,5,6)^\top$; (ii) $v_1 = (2,6,-2)^\top$, $v_2 = (0,1,2)^\top$; (iii) $v_1 = (-1,0,2)^\top$, $v_2 = (0,3,1)^\top$; (iv) $v_1 = (0,0,1)^\top$, $v_2 = (0,1,0)^\top$.
 b) Wskaż bazę B przestrzeni V/W i oblicz $[v_1]_B$, $[v_2]_B$ dla wszystkich powyższych v_1, v_2.
 c) Niech $p : V \to V/W$ będzie naturalnym rzutowaniem (zadanym przez $p(v) = v + W$). Sprawdź, że $p|_{W^\perp}$ jest izomorfizmem liniowym. Czy potrafisz uzasadnić, że to samo będzie prawdą dla dowolnej prostej W przechodzącej przez 0 w $V = \mathbf{R}^3$? $[W^\perp = \{v \in V : \forall w \in W, \langle v, w\rangle = 0\}]$
14. Załóżmy, że $v, w \in \mathbf{R}^3$ są lnz. Jaki warunek musi spełniać jednowymiarowa podprzestrzeń $W < \mathbf{R}^3$, aby $v + W, w + W$ były lz w przestrzeni ilorazowej $\mathbf{R}^3/W$? Rozważ przykład $v = (1,1,0)^\top$, $w = (0,1,1)^\top$.
15. Uzasadnij, że jeśli $W < V$, $(b_1, \ldots, b_k)$ jest bazą W zaś $(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n)$ bazą V, to $(b_{k+1}+W, \ldots, b_n+W)$ jest bazą V/W.
16. Niech $f, g \in V^*$ spełniają $\ker(f) = \ker(g)$. Udowodnij, że istnieje skalar α, taki że $f = \alpha g$.

---

17. Niech $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, U podprzestrzenią $\ker(F)$, zaś $p : V \to V/U$ odwzorowaniem ilorazowym ($p(v) = v + U$). Uzasadnij, że istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $f : V/U \to W$, takie że $f \circ p = F$.
18. Niech $V, W < U$, $\dim(U) < \infty$. Uzasadnij, że funkcja $V/(V \cap W) \to (V+W)/W$ dana wzorem $v + V \cap W \mapsto v + W$ jest dobrze określonym izomorfizmem. Wywnioskuj wzór $\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W)$.
19. Załóżmy, że $U, W < V$ i $\dim(U) + \dim(W) > \dim(V)$. Udowodnij, że $\dim(U \cap W) > 0$. Czy jest prawdą, że każda warstwa W niepusto przecina się z U?
20. Udowodnij, że ślad $\mathrm{tr} : M_{n\times n}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ jest funkcjonałem na przestrzeni macierzy $n \times n$ z wiadomymi działaniami. Wykaż, że dla każdego funkcjonału f na tej przestrzeni istnieje jedyna macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$, taka że $f(X) = \mathrm{tr}(AX)$ dla wszystkich $X \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$.