Algebra liniowa B2. Lista 3

1. Sprawdź, że $B = \{1, X-2, (X-2)^2, \ldots, (X-2)^n\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbf{R}_n[X]$; znajdź wzór na $[P]_B$.
2. Oblicz wymiary następujących przestrzeni: $\{P \in \mathbf{R}_{50}[X] : P(-X) = P(X)\}$, $\{P \in \mathbf{R}_{10}[X] : \int_{-1}^{0} P(x)dx = P'(-7) = 0\}$, $\{(x_1, \ldots, x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} : \sum_{i=1}^{100}(-1)^i x_i = \sum_{i=1}^{100} x_i = \sum_{i=1}^{50} x_{2i} = 0\}$, $\{(x_1, \ldots, x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} : \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = \sum_{i=1}^{50} x_{2i-1} = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}_3[X] : XP'''(X) + P''(X) = 0, P'(-1) + P(0) = 0\}$.
3. Niech $F : \mathbf{R}^{100} \to \mathbf{R}^7$ będzie przekształceniem liniowym. Jaki może być wymiar $\ker(F)$? Jaki może być wymiar $\mathrm{Im}(F)$? A jak będzie dla $F : \mathbf{R}^7 \to \mathbf{R}^{100}$?
4. Z twierdzenia Bezout wywnioskuj, że jeśli wielomian stopnia ≤ 13 zeruje się w $1, 2, 3, \ldots, 14$, to musi on być wielomianem zerowym. Używając tw. o indeksie wywnioskuj stąd, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$ istnieje (jedyny) wielomian P stopnia ≤ 13 taki że $P(1) = a_1, P(2) = a_2 \ldots, P(14) = a_{14}$. [Zdefiniuj odpowiednie przekształcenie liniowe z $\mathbf{R}_{13}[X]$ w $\mathbf{R}^{14}$.]
5. Załóżmy, że $\phi : V \to W$ jest izomorfizmem liniowym. Pokaż, że

a) U jest k-wymiarową podprzestrzenią $V \iff \phi[U]$ jest k-wymiarową podprzestrzenią W.
b) $v_1, \ldots, v_k$ są lnz $\iff \phi(v_1), \ldots, \phi(v_k)$ są lnz.
c) $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k) = U \iff \mathrm{Lin}(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_k)) = \phi[U]$.
d) zachodzą inne podobne własnosci – aż Ci się znudzi.

6. Uzasadnij, że jeśli $b_1, \ldots, b_n$ jest bazą V, zaś $F : V \to W$ jest izomorfizmem, to $F(b_1), \ldots, F(b_n)$ generują W. Jak bardzo potrafisz osłabić założenia tego twierdzenia?
7. Załóżmy, że $\dim(V) = n$, $W < V$, $\dim(W) = k$. Uzasadnij, że istnieje izomorfizm $F : V \to \mathbf{R}^n$, taki że $F[W] = \{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^\top : x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{R}\}$. Napisz taki izomorfizm wzorem dla $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in V : P'(1) + P(0) = 0\}$.
8. Udowodnij lub obal:

a) Jeśli układ wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest lz, a $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to układ wektorów $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ też jest lz.
b) (dla formalistów) Jeśli zbiór $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ jest lz, a $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to zbiór $\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ też jest lz.
c) Jeśli układ wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest lnz, a $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to układ wektorów $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ też jest lnz.

9. Załóżmy, że $b_1, \ldots, b_n$ jest bazą przestrzeni V, zaś $w_1, \ldots, w_n \in W$. Uzasadnij, że istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $F : V \to W$ spełniające $F(b_1) = w_1, \ldots, F(b_n) = w_n$.
10. Udowodnij, że jeśli $W < V$, zaś $f : W \to U$ jest przekształceniem liniowym, to istnieje przekształcenie liniowe $F : V \to U$, takie że f jest obcięciem F do W. Znajdź takie F dla $V = \mathbf{R}_2[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_2[X] : P(3) = 0\}$, $U = \mathbf{R}_1[X]$, $f(P) = \frac{P(X)}{X-3}$.
11. Udowodnij, że jeśli $F : V \to W$ jest monomorfizmem, to istnieje przekształcenie liniowe $G : W \to V$, takie że $G \circ F = Id$ (Dlaczego nie wynika stąd, że każdy monomorfizm jest izomorfizmem?). Znajdź macierze dwóch różnych takich G dla $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ zadanego macierzą $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
12. Czy jest prawdą, że dla dowolnych skończenie wymiarowych podprzestrzeni U, V, W dowolnej przestrzeni liniowej zachodzi wzór (udowodnij lub podaj kontrprzykład):

$$\dim(U+V+W) = \dim(U)+\dim(V)+\dim(W)-\dim(U\cap V)-\dim(V\cap W)-\dim(W\cap U)+\dim(U\cap V\cap W)$$

13. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem k, zaś A dowolnym zbiorem. Zdefiniuj strukturę przestrzeni liniowej nad k (dodawanie i mnożenie przez skalary) na zbiorze $F(A, V)$ wszystkich funkcji z A w V. Sprawdź, że aksjomaty przestrzeni liniowej są spełnione.
14. Podaj przykład przestrzeni liniowej (nieskończenie wymiarowej) V i przekształcenia liniowego $F : V \to V$, które (a) jest epimorfizmem, ale nie jest monomorfizmem; (b) jest monomorfizmem, ale nie jest epimorfizmem. [Wsk. Można użyć jako V na przykład przestrzeni ciągów o wyrazach rzeczywistych]
15. Oblicz wymiar przestrzeni $\{P \in \mathbf{R}_{100}[X] : \int_{-1}^{1} e^{-x^2} P(x)dx = \int_{-2}^{2} e^{-x^2} P(x)dx = 0\}$. Co potrafisz powiedzieć o wymiarze przestrzeni $\{P \in \mathbf{R}_{100}[X] : \int_{-1}^{1} e^{-x^2} P(x)dx = \int_{-2}^{2} e^{-x^2} P(x)dx = \ldots = \int_{-100}^{100} e^{-x^2} P(x)dx = 0\}$?
16. Niech dla $i = 0, \ldots, n$ funkcja $f_i : V_i \to V_{i+1}$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\ker(f_{i+1}) = \mathrm{Im}(f_i)$ (dla $i = 0, \ldots, n-1$). Załóżmy ponadto, że $V_0 = V_{n+1} = \{0\}$. Udowodnij, że $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim(V_i) = 0$.