Algebra liniowa B2. Lista 4

Na tej liście "układ" oznacza "układ równań liniowych". a/b oznacza zadanie b z listy a.

1. Dla poniższych układów równań znajdź rozwiązanie ogólne.
$$\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4 \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2 \end{cases} \quad \begin{cases} -9x_1+10x_2+3x_3+7x_4=7 \\ -4x_1+7x_2+x_3+3x_4=5 \\ 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-2x_4+x_5=4 \\ 6x_1+3x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5 \\ 2x_1+x_2+7x_3-4x_4+x_5=11 \\ 4x_1+2x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6 \end{cases}$$
2. Wyznacz układ fundamentalny rozwiązań układu jednorodnego:
$$\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0 \\ x_2-x_4+x_6=0 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0 \\ x_2-x_3+x_6=0 \\ x_1-x_4+x_5=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0 \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0 \end{cases}$$
3. Dla jakich prawych stron układy z zadania 2 pozostają niesprzeczne?
4. Znajdź wielomian $P(X)$ o współczynnikach rzeczywistych (a) stopnia 2, taki że $P(1)=8$, $P(-1)=2$ i $P(2)=14$; (b) stopnia 3, taki że $P(-2)=1$, $P(-1)=3$, $P(1)=13$ i $P(2)=33$;
5. Przestrzenie rozpinane przez poniższe układy wektorów opisz układami równań:
$$\text{(a)} \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\7\end{pmatrix}; \text{(b)} \begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\8\\9\\-2\end{pmatrix}; \text{(c)} \begin{pmatrix}2\\-1\\3\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-5\\12\\11\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\6\\3\\-3\end{pmatrix}.$$
6. Znajdź jednorodny układ równań liniowych złożony z (a) dwóch (b) trzech (c) czterech równań, dla którego wektory $(1,4,-2,2,-1)^\top$, $(1,13,-1,2,9)^\top$, $(2,7,-8,4,-5)^\top$ stanowią fundamentalny układ rozwiązań.
7. Opisz parametrycznie przestrzeń z zadania 1/14.

---

8. Wytłumacz, jak mając układ równań opisujący podprzestrzeń $W < \mathbf{R}^n$ i wektor $v \in \mathbf{R}^n$ wyznaczyć układ równań opisujący warstwę $v+W$. Opisz zbiór $\{(1,0,-1,1)^\top + t(1,2,1,-2)^\top + s(-1,3,4,0)^\top + u(-1,8,9,-2)^\top : t,s,u \in \mathbf{R}\}$ układem równań.
9. Napisz macierz, której wszystkie wyrazy są niezerowe a rząd jest możliwie mały.
10. Niech $B \in M_{(k+1)\times n}(\mathbf{R})$ będzie macierzą otrzymaną z $A \in M_{k\times n}(\mathbf{R})$ przez dopisanie (u dołu) jednego wiersza. Czy może się zdarzyć, że wymiar $\mathrm{Im}(F_B)$ jest mniejszy niż wymiar $\mathrm{Im}(F_A)$?
11. Uzasadnij, że zbiór prawych stron dla których układ o ustalonej macierzy głównej A jest niesprzeczny jest podprzestrzenią liniową; uzasadnij, że wymiar tej podprzestrzeni plus wymiar przestrzeni rozwiązań układu jednorodnego o tej samej macierzy głównej A jest równy liczbie kolumn A.
12. Swawolny Dyzio, dostawszy macierz 7×8 rzędu 5, wykreśla w niej 3 wiersze i 3 kolumny, starając się, aby otrzymana macierz 4×5 miała możliwie mały rząd. Czy Swawolny Dyzio zawsze jest w stanie uzyskać macierz rzędu 0? Ułóż inne, trudniejsze wersje tego zadania.
13. Zinterpretuj operacje kolumnowe w języku układów równań.
14. Uzasadnij, że jeśli układ ma co najmniej 2 rozwiązania, to rząd jego macierzy głównej jest mniejszy niż jej liczba kolumn.
15. Uzasadnij, że jeśli rząd macierzy głównej układu jest równy liczbie jej wierszy, to układ jest niesprzeczny. Podaj przykład wskazujący, że nie jest to konieczny warunek niesprzeczności.
16. Uzasadnij, że jeśli kolumny 1,3,5 macierzy A są lnz, to po dowolnej operacji wierszowej pozostaną lnz. Uogólnij. Wywnioskuj stąd, że kolumny, w których po wykonaniu eliminacji Gaussa znajdą się wyrazy wiodące, w każdym momencie procesu eliminacji są lnz. Wykorzystując to rozwiąż zadanie 2/9.
17. Udowodnij, że jeśli układ jednorodny ma więcej niewiadomych niż równań, to ma niezerowe rozwiązanie. Udowodnij, że jeśli układ ma więcej równań niż niewiadomych, to można zmienić jego prawe strony tak, by stał się sprzeczny.
18. Niech wierszami macierzy B będą wektory fundamentalnego układu rozwiązań układu $A^\top X = 0$. Udowodnij, że $\ker F_B = \mathrm{Im} F_A$. [Wsk. Jedno zawieranie jest łatwe; zamiast pokazywać drugie porównaj wymiary.]

---

19. Niech $W < \mathbf{R}^n$, $W = \mathrm{Lin}\{v_1,\ldots,v_k\}$, $\dim W = s$. Udowodnij, że W można opisać układem $n-s$ równań.
20. Jak bardzo wynik metody eliminacji zależy od dokonywanych wyborów? Czy potrafisz podać przykład układu jednorodnego, do którego można zastosować metodę Gaussa na dwa różne sposoby i otrzymać (a) dwa różne fundamentalne układy rozwiązań? (b) dwa różne podziały zmiennych na wolne i związane?
21. Uzasadnij, że rząd(A+B) $\leq$ rząd(A)+rząd(B).
22. Używając operacji wierszowych z całkowitymi skalarami spróbuj sprowadzić następujące macierze 2×1 do możliwie prostej postaci: $\binom{4}{7}$, $\binom{-6}{27}$, $\binom{147}{89}$. Rozwiń to zadanie.

Lista zadań na konwersatorium z algebry liniowej i wieloliniowej

Wszystkie przestrzenie poniżej mają z założenia skończony wymiar; $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym.

O równości rzędu kolumnowego i rzędu wierszowego

1. Sprawdź, że $F^* : W^* \ni f \mapsto f \circ F \in V^*$ też jest liniowe. Sprawdź, że jeśli utożsamić V z V^{**} a W z W^{**} przez naturalne izomorfizmy ι, to $F^{**} = F$.
2. Z pewnego zadania z poprzedniej listy wynika, że istnieje jedyne przekształcenie liniowe $\overline{F} : V/\ker(F) \to W$ takie że $F = \overline{F} \circ p$ [gdzie $p : V \ni v \mapsto v + \ker(F) \in V/\ker(F)$]. Udowodnij, że $\overline{F}$ jest monomorfizmem.
3. Zdefiniuj naturalne odwzorowanie $\mathrm{Im}(F^*) \to (V/\ker(F))^*$, i udowodnij, że jest ono monomorfizmem.
4. Z poprzedniego zadania wywnioskuj, że $\dim \mathrm{Im}(F^*) \leq \dim \mathrm{Im}(F)$. Następnie z tej nierówności i z przedprzedpoprzedniego zadannia wywnioskuj, że $\dim \mathrm{Im}(F^*) = \dim \mathrm{Im}(F)$. Z tego ostatniego stwierdzenia wynika równość rzędu kolumnowego i rzędu wierszowego dowolnej macierzy. Czy potrafisz owo wynikanie zobaczyć?

O iloczynie tensorowym

Przypomnienie: $F(A, k)$ to przestrzeń funkcji z A w k [zakładamy, że A jest skończony]. $\delta_a \in F(A, k)$ to funkcja przyjmująca wartość 1 dla argumentu $a \in A$, i wartość 0 dla wszystkich innych argumentów.

5. Dla $f \in F(X, k)$ i $g \in F(Y, k)$ określmy funkcję $f \otimes g : X \times Y \to k$ wzorem $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$. Przypomnij sobie, że $B = \{\delta_x : x \in X\}$ jest bazą $F(X, k)$; niech $C = \{\delta_y : y \in Y\}$ będzie analogiczną bazą $F(Y, k)$. Udowodnij, że $D = \{f \otimes g : f \in B, g \in C\}$ jest bazą $F(X \times Y, k)$. Następnie wykaż, że jeśli B, C są zupełnie dowolnymi bazami $F(X, k)$, $F(Y, k)$, to D określone jak poprzednio w dalszym ciągu jest bazą $F(X \times Y, k)$.
6. Jeśli zamiast $F(X, k)$ i $F(Y, k)$ wziąć zupełnie dowolne (skończenie wymiarowe) przestrzenie liniowe V, W, to jak określić odpowiednik przestrzeni $F(X \times Y, k)$?
7. Spróbuj nadać sens pojęciu przestrzeni liniowej której elementami są kombinacje liniowe wektorów z V o współczynnikach będących wektorami z W. Czy jeśli zamienić rolami V i W, to wyjdzie izomorficzna przestrzeń?