Algebra liniowa B2. Lista 6

1. Rozwiąż w S_7 równania: (a) $\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7}{5\,1\,3\,4\,7\,2\,6}\sigma = \binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7}{5\,3\,7\,1\,4\,6\,2}$; (b) $\sigma\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7}{5\,1\,3\,4\,7\,2\,6} = \binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7}{5\,3\,7\,1\,4\,6\,2}$.
2. Permutację $\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7}{2\,3\,7\,5\,4\,6\,1}$ przedstaw w postaci (a) iloczynu transpozycji; (b) iloczynu transpozycji postaci $(i, i+1)$. Postaraj się znaleźć przedstawienia z możliwie małą liczbą czynników.
3. Uzasadnij wzór $(i-1,i)(i,i+1)(i-1,i) = (i,i+1)(i-1,i)(i,i+1)$.
4. Wyznacz liczbę nieporządków w ciągach: $(3,5,2,1,6,4,8,7)$; $(2,4,1,7,6,5,3)$; $(3,5,8,7,2,6,1,4)$
5. Wyjaśnij które z podanych iloczynów (i z jakim znakiem) występują w rozwinięciu wyznacznika odpowiedniego (jakiego?) stopnia: a) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$; b) $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}$; c) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$.
6. Wybierz takie wartości i, j, k aby iloczyn $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ wystąpił ze znakiem minus w rozwinięciu wyznacznika stopnia 6.
7. Wykorzystując wzór na pełne rozwinięcie wyznacznika (lub inaczej) oblicz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

8. Za pomocą pełnego rozwinięcia oblicz wartość wyznacznika, którego elementy na głównej przekątnej są wszystkie równe 1, elementy j-tego wiersza są równe $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j = 1, a_{j+1}, \dots, a_n$, a wszystkie pozostałe wyrazy są równe 0.
9. W pełnym rozwinięciu wyznacznika $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ znajdź te wyrazy, które zawierają a) x^3; b) x^4.
10. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

---

11. Uzasadnij, że każde $\sigma \in S_n$ można przedstawić jako iloczyn transpozycji $(1,2), (1,3), (1,4), \dots (1,n)$.
12. Jak zmieni się wartość wyznacznika $n \times n$ jeśli:
    a) znak każdego z jego wyrazów zmienić na przeciwny?
    b) każdy element a_{ij} pomnożyć przez c^{i-j}, $c \neq 0$?
    c) pierwszą kolumnę przestawić na ostatnie miejsce, a pozostałe przesunąć w lewo, zachowując ich porządek?
    d) wiersze zapisać w odwrotnym porządku?
13. Wykaż, że dowolny wyznacznik jest równy połowie sumy dwóch wyznaczników, z których jeden jest otrzymany z danego przez dodanie do wszystkich wyrazów i-tego wiersza liczby a, a drugi jest otrzymany z danego przez dodanie do wszystkich wyrazów i-tego wiersza liczby $-a$.
14. Uzasadnij, że jeśli A i B są macierzami kwadratowymi, to $\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$. (Wsk. Rozważ pełne rozwinięcie wyznacznika; uzasadnij, że jeśli w pewnym wyrazie tego rozwinięcia jednym z czynników jest jakiś element macierzy C, to innym czynnikiem w tym samym wyrazie musi być 0.)

---

15. Dla $\sigma \in S_3$ definiujemy $\rho(\sigma) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ wzorem $\rho(\sigma)((x_1, x_2, x_3)^\top) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)})^\top$. Uzasadnij, że $\rho(\sigma\tau) = \rho(\sigma) \circ \rho(\tau)$. Znajdź wszystkie podprzestrzenie $V < \mathbf{R}^3$, takie że $(\forall \sigma \in S_3)(\forall v \in V)(\rho(\sigma)(v) \in V)$. Uogólnij.
16. Na $M_{n\times n}(\mathbf{R})$ definiujemy relację równoważności $\sim$: $A \sim B \iff B$ można uzyskać z A przez ciąg operacji kolumnowych. Opisz klasy abstrakcji relacji $\sim$.

K. Uzasadnij, że zachowujące orientację izometrie $\mathbf{R}^3$ przeprowadzające w siebie dany wielościan foremny tworzą grupę. Grupa taka jest zawsze izomorficzna z S_n lub z $A_n = \{\sigma \in S_n : sgn(\sigma) = 1\}$. Udowodnij to, i dla każdej bryły platońskiej wyznacz odpowiadające jej n.

Algebra liniowa B2. Lista 7

1. Z tego, że liczby 1798, 2139, 3255 i 4867 dzielą się przez 31 wywnioskuj, że następujący wyznacznik jest podzielny przez 31: $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.
2. Wskaż maksymalnego rozmiaru niezerowy minor macierzy $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 10 \\ 3 & -2 & 0 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 11 & 7 & 15 \end{pmatrix}$.
3. Pewna macierz 50×100 ma niezerowy minor rozmiaru 37×37. Co można powiedzieć o wymiarze jądra przekształcenia zadanego tą macierzą?

---

4. Oblicz wyznaczniki, np. przez sprowadzenie do postaci trójkątnej:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$
5. Oblicz wyznaczniki:
$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$
6. Oblicz rekurencyjnie wyznaczniki:
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$
7. Oblicz podane wyznaczniki, zapisując je w postaci iloczynu wyznaczników (w drugim z nich $s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$):
$$\begin{vmatrix} \cos(x_1-y_1) & \cos(x_1-y_2) & \dots & \cos(x_1-y_n) \\ \cos(x_2-y_1) & \cos(x_2-y_2) & \dots & \cos(x_2-y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(x_n-y_1) & \cos(x_n-y_2) & \dots & \cos(x_n-y_n) \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$
8. Udowodnij, że $\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj} = \delta_{ik} \cdot \det(A)$, gdzie $\delta_{ik} = 0$ jeśli $i \neq k$, $\delta_{ik} = 1$ jeśli $i = k$.
9. Niech V będzie k-wymiarową podprzestrzenią $\mathbf{R}^n$. Udowodnij, że istnieją $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, takie że odwzorowanie $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ dane przez $F((x_1, \ldots, x_n)^\top) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})^\top$ po obcięciu do V jest izomorfizmem $V \to \mathbf{R}^k$.
10. Udowodnij, że jeśli $F : V \to V$, a B i C są bazami V, to $\det(m_B(F)) = \det(m_C(F))$.

---

11. Czy aby wyznaczyć rząd $A^\vee$ wystarczy znać rząd A? (A jest kwadratowa.)
12. Udowodnij, że jeśli dla każdej pary $i \neq j$ zachodzi $(n-1)|a_{ij}| < |a_{ii}|$, to $\det(a_{ij}) \neq 0$.
13. Niech $f(x) = a_1 + a_2x + \ldots + a_nx^{n-1}$. Wykaż, że cyrkulant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$ jest równy iloczynowi $f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\ldots f(\epsilon_n)$, gdzie $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ są wszystkimi pierwiastkami z 1 stopnia n. (Wsk. pomnóż przez odpowiedni wyznacznik Vandermonde'a.)
14. Udowodnij, że jeśli dla pewnego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & \dots & f_1^{(n-1)}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & \dots & f_2^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & f_n'(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$, to $f_1, \ldots, f_n$ są lnz (w przestrzeni wszystkich funkcji z $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$).

K. Po $\mathbf{Z}$ spaceruje losowo n policjantów; każdy ma własną monetę, co minutę nią rzuca, na orła robi krok długości 1 w prawo, a na reszkę krok długości 1 w lewo. Niech $a_1 < \ldots < a_n$, $b_1 < \ldots < b_n$ będą liczbami parzystymi; niech p_{ij} oznacza prawdopodobieństwo, że policjant wychodzący z a_i po godzinie znajdzie się w b_j. Udowodnij, że prawdopodobieństwo tego że n policjantów zaczynających spacer w $a_1, \ldots, a_n$ po godzinie znajdzie się w $b_1, \ldots, b_n$, przy czym po drodze żadni dwaj się nie spotkają, wynosi $\det(p_{ij})$.