Algebra liniowa B2. Lista 8

We wszystkich zadaniach wolno założyć, że $\dim(V), \dim(W) < \infty$.

1. Czy $\mathbf{R}^3$ jest sumą prostą podprzestrzeni

a) $\mathrm{Lin}(\{(1,2,3)^\top\}), \{(x,y,z)^\top : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}\}, \{(t,0,0)^\top : t \in \mathbf{R}\}$?

b) $\{(x,y,z)^\top : x+y+z=0\}, \{(x,y,z)^\top : \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}\}$?

c) $\mathrm{Lin}(\{(1,2,1)^\top, (-2,1,3)^\top\}), \mathrm{Lin}(\{(1,6,7)^\top\})$? d) $\{(x,y,z)^\top : x+2y-z=0\}, \mathrm{Lin}(\{(1,2,-1)^\top\})$?

2. Czy jest prawdą, że (w punkcie c przyjmujemy $\epsilon = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$)

a) $\mathbf{R}[X] = \{P \in \mathbf{R}[X] : P(-X) = P(X)\} \oplus \{P \in \mathbf{R}[X] : P(-X) = -P(X)\}$?

b) $\mathbf{R}_{12}[X] = \{P \in \mathbf{R}_{12}[X] : \text{stopień } P \text{ jest } \leq 6\} \oplus \{P \in \mathbf{R}_{12}[X] : \text{stopień } P \text{ jest } \geq 7\}$?

c) $\mathbf{C}[X] = \{P \in \mathbf{C}[X] : P(\epsilon X) = P(X)\} \oplus \{P \in \mathbf{C}[X] : P(\epsilon X) = \epsilon P(X)\} \oplus \{P \in \mathbf{C}[X] : P(\epsilon X) = \epsilon^2 P(X)\}$?

3. Znajdź (jakąś) podprzestrzeń dopełniczą do $W < V$, jeśli (a) $V = \mathbf{R}^3$, $W = \mathrm{Lin}(\{(1,2,0)^\top, (0,1,1)^\top\})$; (b) $V = \mathbf{R}_4[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_4[X] : P'(1) + 2P(0) = 0\}$; (c) $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_3[X] : \int_{-1}^1 P(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 P(x)dx = 0\}$; (d) $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_3[X] : \int_{-1}^1 P(x)e^{-x^2}dx = 0\}$;

4. Niech $B \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ będzie pewną ustaloną macierzą. Czy są podrzestrzeniami $M_{n\times n}(\mathbf{R})$ następujące podzbiory tej przestrzeni: $\{A : AB = BA\}$; $\{A : ABA^{-1} = B\}$; $\{A : BAB^{-1} = A\}$; $\{A : AB + BA = 0\}$; $\{A : A^\top BA = B\}$; $\{A : B^\top AB = A\}$; $\{A : A^\top B - BA = 0\}$; $\{A : (\forall C \in M_{n\times n}(\mathbf{R}))(\mathrm{tr}(A^\top BC) = 0)\}$;

5. Udowodnij, że (a) $M_{n\times n}(\mathbf{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbf{R}) : A^\top = A\} \oplus \{A \in M_{n\times n}(\mathbf{R}) : A^\top = -A\}$; (b) $M_{n\times n}(\mathbf{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbf{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\} \oplus \{tI : t \in \mathbf{R}\}$.

6. Zauważ, że $(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right))$ jest bazą $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$. Napisz macierze przekształceń $M \mapsto \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)M$, $M \mapsto M\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ w tej bazie.

7. Niech $V = V_1 \oplus V_2$.

a) Pokaż, że jeśli $F_i : V_i \to W$ są liniowe, to istnieje jedyne liniowe $F : V \to W$, takie że $F|_{V_i} = F_i$. $(i = 1,2)$

b) Załóżmy, że $F, G : V \to W$ są liniowe. Udowodnij, że jeśli $F|_{V_1} = G|_{V_1}$, $F|_{V_2} = G|_{V_2}$, to $F = G$.

---

8. Oblicz wielomian charakterystyczny $F : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$, jeśli (a) $F(P(X)) = P'(X)$; (b) $F(P(X)) = \frac{1}{X}\int_0^X P(Y)dY$; (c) $F(P(X)) = P(3X+1)$.

9. Pewne trzy proste w $\mathbf{R}^3$ przechodzące przez 0 mają tę własność, że kąt między każdymi dwoma z nich jest $> 60°$. Czy wynika stąd, że $\mathbf{R}^3$ jest sumą prostą tych trzech prostych?

10. Niech $F : V \to W$.

a) Czy jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to $\mathrm{Im}(F) = F[V_1] \oplus F[V_2]$?

b) Czy jeśli $W = W_1 \oplus W_2$, to $V = F^{-1}[W_1] \oplus F^{-1}[W_2]$?

c) Czy jeśli $V = V_1 \oplus V_2$ i $F|_{V_1}$, $F|_{V_2}$ są $1-1$, to F jest $1-1$?

d) Czy jeśli $W = W_1 \oplus W_2$ i $W_1, W_2 \subseteq \mathrm{Im}(F)$, to F jest na?

11. Udowodnij, że jeśli $V \cap W = \{0\}$, to $V + W = V \oplus W$.

12. Niech $V_1, V_2, V_3 < V$. Załóżmy, że $\dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(V_3) = \dim(V)$, $V_2 \cap V_3 = \{0\}$, $V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{0\}$. Udowodnij, że $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. Uogólnij na większą liczbę podprzestrzeni.

13. Niech $V_1, \ldots, V_n < V$, zaś $B_1, \ldots, B_n$ niech będą bazami $V_1, \ldots, V_n$ odpowiednio.

a) Udowodnij, że jeśli $V_1, \ldots, V_n$ są lnz, to $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ jest lnz.

b) Udowodnij, że jeśli $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, to $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ jest bazą V.

14. Załóżmy, że $V_1, \ldots, V_n$ są lnz, zaś $\{1, \ldots, n\} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. Uzasadnij, że $\sum_{a\in A} V_a \cap \sum_{b\in B} V_b = \{0\}$.

15. Podaj przykład przestrzeni liniowej i jej czterech podprzestrzeni, z których każde trzy są lnz, ale wszystkie cztery nie są lnz.

16. Niech $W = W_1 \oplus W_2$. Czy jest prawdą, że $\mathrm{Hom}(V, W) = \mathrm{Hom}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}(V, W_2)$?

17. Uzasadnij, że $\mathrm{tr} : M_{n\times n}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ jest funkcjonałem liniowym. Udowodnij, że dla dowolnych $A, B \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ zachodzi $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

---

18. Niech $A, B \in M_{n\times n}(k)$. Udowodnij, że: (a) $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$; (b) $(A^\vee)^\top = (A^\top)^\vee$; (c) $(tA)^\vee = t^{n-1}A^\vee$; (d) $(A^\vee)^\vee = (\det(A))^{n-2}A$.

19. Podaj przykład przekształcenia liniowego F, takiego że $\chi_F(x) = 7 - 2x + 7x^2 - 4x^3 + x^4$.

20. Podaj przykład dwóch macierzy (kwadratowych, tego samego rozmiaru) w wyrazach w ciele 2-elementowym, których wielomiany charakterystyczne są różne, ale zadają tą samą funkcję na ciele 2-elementowym.

21. Udowodnij, że jeśli $v_1, \ldots, v_k \in V$, $f_1, \ldots, f_k \in V^*$, oraz $\det(f_i(v_j)) \neq 0$, to $v_1, \ldots, v_k$ są lnz w V, zaś $f_1, \ldots, f_k$ są lnz w V^*.

22. Dla $W < V$ położmy $W^0 := \{f \in V^* : f|_W = 0\}$. Pokaż, $\dim W^0 \geq \dim V - \dim W$. Czy potrafisz pokazać, że tak naprawdę zachodzi równość? Pokaż, że jeśli $V = W_1 \oplus W_2$, to $V^* = W_1^0 \oplus W_2^0$.

Algebra liniowa B2. Lista 9

Def. *Przestrzenią pierwiastkową* przekształcenia $F : V \to V$ odpowiadającą wartości własnej λ tego przekształcenia nazywamy $V^\lambda = \{v \in V : (\exists k \in \mathbf{N})((F-\lambda)^k v = 0)\}$. [gdzie $F - \lambda = F - \lambda \cdot id_V$.]

1. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; znajdź wszystkie F_A-niezmiennicze podprzestrzenie $\mathbf{R}^3$.
2. Niech $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Uzasadnij, że w $\mathbf{R}^2$ nie ma F_A-niezmienniczej podprzestrzeni dopełniczej do $\mathrm{Lin}(\{E_1\})$.
3. Podaj przykład przekształcenia liniowego $\mathbf{R}^3$ w siebie które ma nieskończenie wiele podprzestrzeni niezmienniczych.
4. Pokaż, że jeśli V i W są podprzestrzeniami F-niezmienniczymi, to i $V+W$, $V \cap W$ są F-niezmiennicze.
5. Uzasadnij, że $\ker(F)$ oraz $\mathrm{Im}(F)$ są F-niezmiennicze. $(F : V \to V)$
6. Ile jest możliwych postaci Jordana 6×6 z trzema wartościami własnymi?
7. Zbadaj diagonalizowalność macierzy: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

---

8. Uzasadnij, że $V^\lambda < V$.
9. Załóżmy, że $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ jest diagonalizowalne, zaś W jest F-niezmienniczą podprzestrzenią $\mathbf{R}^3$. Uzasadnij, że pewien niezerowy wektor własny F należy do W. (Wsk. pracuj w bazie wektorów własnych.)
10. Podaj przykład macierzy 4×4 której jedynymi wektorami własnymi są skalarne krotności następujących wektorów: $(1,0,2,1)^\top$, $(-1,1,0,1)^\top$. Ile wartości własnych może mieć taka macierz? (zrób to zadanie nad $\mathbf{R}$, jak i nad $\mathbf{C}$. Czy jest jakaś różnica?)
11. Udowodnij, że jeśli $F, G : V \to V$, oraz $F \circ G = G \circ F$, to dowolna (a) przestrzeń własna $V_\lambda(F)$; (b) przestrzeń pierwiastkowa $V^\lambda(F)$; jest G-niezmiennicza.
12. Wykaż, że jeśli dla $G : V \to V$ mamy $\ker(G^k) = \ker(G^{k+1})$, to $V^0(G) = \ker(G^k)$. Wywnioskuj stąd, że jeśli dla $F : V \to V$ mamy $\ker((F-\lambda)^k) = \ker((F-\lambda)^{k+1})$, to $V^\lambda(F) = \ker((F-\lambda)^k)$.
13. Wyznacz przestrzenie własne, pierwiastkowe oraz postać Jordana przekształcenia $\mathbf{R}_n[X] \ni P \mapsto P' \in \mathbf{R}_n[X]$.
14. Wyznacz przestrzenie własne, postać Jordana i przestrzenie pierwiastkowe odwzorowań F_A, dla $A =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. Dla wielomianu $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ oraz $F : V \to V$ definiujemy $P(F) := a_0 Id + a_1 F + \ldots + a_n F^n$.
 a) Udowodnij, że dla dowolnych dwóch wielomianów P, Q mamy $P(F) \circ Q(F) = Q(F) \circ P(F)$.
 b) Udowodnij, że jeśli $G : V \to V$, $F \circ G = G \circ F$, to dla dowolnego wielomianu P zachodzi $P(F) \circ G = G \circ P(F)$.
16. Niech $F : V \to W$. Uzasadnij, że można dobrać bazy: B przestrzeni V i C przestrzeni W, tak aby $m_C^B(F)$ miała jedynki na miejscach $(1,1), (2,2), \ldots, (k,k)$ (gdzie $k = \dim \mathrm{Im}(F)$), a zera na wszystkich pozostałych miejscach. (Wsk. zacznij od wybrania bazy $\ker(F)$.)
17. Wyprowadź wzór na n-tą potęgę klatki Jordana.

---

18. Załóżmy, że $G : V \to V$, $G^n = 0$. Niech K_k będzie przestrzenią dopełniczą do $\ker(G^{k-1})$ w $\ker(G^k)$.
 a) Udowodnij, że przestrzenie $K_k, k = 1, 2, \ldots$ są lnz.
 b) Udowodnij, że $\dim(K_k) \geq \dim(K_{k+1})$.
 c) Udowodnij, że jeśli $\dim \ker(G) = 1$, to macierz G w odpowiedniej bazie jest pojedynczą klatką Jordana.
19. Niech V będzie zespoloną przestrzenią liniową, zaś $F : V \to V$ przekształceniem liniowym. Uzasadnij, że w pewnej bazie przestrzeni V macierz F jest górnotrójkątna. (Wsk. zrób to indukcyjnie: weź niezerowy wektor własny v przekształcenia F jako pierwszy wektor bazy, po czym rozważ $\overline{F} : V/\mathrm{Lin}(v) \to V/\mathrm{Lin}(v)$.)
20. Udowodnij, że jeśli $G^n = 0$, to $\chi_G(x) = (-x)^n$. $(G : V \to V)$