Algebra liniowa 2R. Lista 12

Wszystko dzieje się przestrzeni euklidesowej/unitarnej V, chyba że treść zadania mówi inaczej; $T\colon V \to V$ jest przekształceniem liniowym. Kwadratowa macierz rzeczywista/zespolona A jest ortogonalna/unitarna, jeśli $A^{-1} = A^*$. Przekształcenie samosprzężone T nazywamy *nieujemnie określonym,* jeśli $(\forall v \in V)(\langle Tv, v\rangle \geq 0)$ (a *dodatnio określonym,* jeśli dla niezerowych v nierówność jest ostra).

1. Uzasadnij, że jeśli B, C są ortonormalnymi bazami V, to macierz $m_C^B(Id)$ jest ortogonalna / unitarna.
2. Wyznacz postać kanoniczną i bazę ortonormalną w której jest ona przyjmowana dla ortogonalnych przekształceń $\mathbf{R}^n$ zadanych w bazie standardowej macierzami:
$$\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix};$$
3. (V unitarna) Uzasadnij, że jeśli T jest samosprzężone, to dla każdego $v \in V$ liczba $\langle Tv, v\rangle$ jest rzeczywista.
4. Zdiagonalizuj w bazie ortonormalnej macierze:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
5. Niech $C = (b_1, b_1 + b_2)$, gdzie $B = (b_1, b_2)$ jest bazą ortonormalną V; niech $m_B^B(T) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Znajdź $m_C^C(T^*)$.
6. Znajdź pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $(1,5,2,1,3)^\top, (-1,4,2,-2,0)^\top$, oraz objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $(1,2,3,4)^\top, (1,-1,0,1)^\top, (0,1,1,-1)^\top$.
7. Znajdź odległość punktu $(1,2,3,4)^\top$ od płaszczyzny $\mathrm{Lin}(\{(1,-1,1,-1)^\top, (0,1,2,-1)^\top\})$.
8. Znajdź rozkłady biegunowe macierzy: $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

---

9. Niech V i W będą dwiema przestrzeniami euklidesowymi / unitarnymi, zaś $F\colon V \to W$ – przekształceniem liniowym. Udowodnij, że istnieje jedyne przekształcenie liniowe $F^*\colon W \to V$ spełniające
$$(\forall v \in V)(\forall w \in W)(\langle F(v), w\rangle = \langle v, F^*(w)\rangle).$$
10. Udowodnij, że (a) $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$; (b) $\mathrm{Im}(T^*) = \ker(T)^\perp$.

W kolejnych dwóch zadaniach niech liniowe $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ będzie zadane na bazie standardowej następująco: $F(e_i) = e_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$; $F(e_n) = e_1$.

11. Wyznacz wartości własne i wektory własne $F_{\mathbf{C}}$.
12. Wyznacz postać kanoniczną F (które jest ortogonalne).
13. W przestrzeni $\mathbf{R}_n[X]$ z iloczynem skalarnym $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$ rozpatrujemy przekształcenie liniowe dane przez $F(P) = P(1-X)$. Uzasadnij, że to F jest ortogonalne i wyznacz jego postać kanoniczną.
14. Uzasadnij, że jeśli ortogonalne przekształcenie $\mathbf{R}^6$ ma rzeczywistą wartość własną, to ma też przynajmniej dwa liniowo niezależne wektory własne.
15. Niech U będzie macierzą unitarną. Uzasadnij, że wszystkie wyrazy U^{100} są co do modułu nie większe niż 1.
16. Uzasadnij, że jeśli $\|v\| = \|w\|$, to istnieje przekształcenie ortogonalne/unitarne F, takie że $F(v) = w$.
17. A, B to kwadratowe macierze zespolone. $\bar{A}$ to macierz której wyrazy są liczbami sprzężonymi do odpowiednich wyrazów macierzy A. Czy $\overline{AB} = \bar{B}\bar{A}$, czy może $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$? Czemu jest równe $(AB)^*$? Uzasadnij wzór $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
18. Załóżmy, że cztery liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Udowodnij, że wtedy macierz
$$\begin{pmatrix} a+bi & -c+di \\ c+di & a-bi \end{pmatrix}$$
jest unitarna. Czy każda unitarna macierz 2×2 jest tej postaci?

19. Niech $T = T^*$. Udowodnij, że wektory własne T odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe.
20. Udowodnij, że jeśli $U: V \to V$ jest przekształceniem unitarnym, zaś $T = T^*$, to UTU^{-1} jest samosprzężone.
21. Niech $T = T^*$. Udowodnij, że T jest nieujemnie określone wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$.
22. Udowodnij, że jeśli $T = T^*$, to $\sup\{\|Tx\| : x \in V, \|x\| \leq 1\} = \sup\{\langle Tx, x\rangle : x \in V, \|x\| \leq 1\}$. (Lewą stronę tej równości nazywamy *normą* przekształcenia T i oznaczamy $\|T\|$.)
23. Wyznacz normę przekształcenia liniowego $\mathbf{R}^2$ zadanego macierzą $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&1\end{smallmatrix}\right)$.
24. Czy zbiór $\{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbf{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 2x_4x_1 = 1\}$ jest ograniczony?
25. Podaj przykład dwóch form kwadratowych które nie diagonalizują się we wspólnej bazie.
26. Udowodnij, że macierz Grama układu wektorów jest zawsze nieujemnie określona.
27. Niech $M \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ będzie macierzą symetryczną. Udowodnij równoważność następujących warunków:
    a) w $\mathbf{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym istnieje n liniowo niezależnych wektorów, których macierzą Grama jest M;
    b) na $\mathbf{R}^n$ można zadać iloczyn skalarny tak, by macierzą Grama bazy standardowej była macierz M.
28. Czy istnieje iloczyn skalarny na $\mathbf{R}^3$, taki że cosinusy kątów między wektorami E_1, E_2, E_3, wynoszą $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$?
29. (V unitarna, $A, B : V \to V$ liniowe)
    a) Uzasadnij, że jeśli A jest unitarne a 1 nie jest jego wartością własną, to $B = i(A - Id)^{-1}(A + Id)$ jest samosprzężone.
    b) Uzasadnij, że jeśli B jest samosprzężone, to $A = (B - iId)^{-1}(B + iId)$ jest unitarne.
30. Załóżmy, że $v, w \in \mathrm{Lin}(\{v_1, \ldots, v_k\})$, oraz że $\langle v, v_i\rangle = \langle w, v_i\rangle$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Wykaż, że $v = w$.

---

31. Niech $v_1, \ldots, v_k$, $w_1, \ldots, w_k$ spełniają, dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, warunek $\langle v_i, v_j\rangle = \langle w_i, w_j\rangle$. Udowodnij, że istnieje przekształcenie ortogonalne/unitarne U, takie że $U(v_i) = w_i$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
32. Wywnioskuj z tw. spektralnego następującą jego wersję:
    Niech T będzie operatorem samosprzężonym na przestrzeni euklidesowej / unitarnej V. Wtedy:
    $$(1)\ \sigma(T) \subseteq \mathbf{R}; \quad (2)\ V = \oplus_{\lambda\in\sigma(T)} V_\lambda; \quad (3)\ V_\lambda \perp V_\mu \text{ dla } \lambda \neq \mu; \quad (4)\ T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda P_{V_\lambda}.$$
33. (V unitarna) Udowodnij, że jeśli $(\forall v \in V)(\langle Tv, v\rangle = 0)$, to $T = 0$. Czy jest to prawdą również w przypadku rzeczywistym?
34. Udowodnij, że endomorfizm T przestrzeni unitarnej V jest samosprzężony $\iff (\forall v \in V)(\langle Tv, v\rangle \in \mathbf{R})$.
35. Niech A będzie rzeczywistą macierzą kwadratową i antysymetryczną ($A^\top = -A$). Udowodnij, że wszystkie pierwiastki $\chi_A(X)$ są liczbami urojonymi.
36. (V unitarna) Uzasadnij, że każde przekształcenie liniowe $V \to V$ jest kombinacją liniową czterech przekształceń unitarnych.
37. Udowodnij, że dla $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ zachodzi nierówność (Hadamarda) $(\det(A))^2 \leq \Pi_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)$.
38. Wykaż, że objętość równoległościanu spełnia $V(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) \leq V(a_1, \ldots, a_k)V(b_1, \ldots, b_l)$.
39. Załóżmy, że wektory $v_1, \ldots, v_n$ rozpinają $(n-1)$-wymiarową podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej V. Jaka jest $(n-1)$-wymiarowa objętość zbioru $\{\sum_{i=1}^n t_i v_i : 0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq 1\}$?

PROMOCJA!

Zadania mają podwójną wartość punktową (0,2/0,4/0,6 pkt.); łącznie za zadanie domowe z tej listy można uzyskać 0,1,2,3 lub 4 pkt. Termin oddawania zadania domowego z tej listy: czwartek 14.VI.2018 na początku ćwiczeń.