Algebra ISIM 2. Lista 6

Ćwiczenia

1. Udowodnij, że każdy element grupy $\langle a, b \mid a^2, b^7, aba^{-1} = b^{-1}\rangle$ da się zapisac w postaci $a^k b^\ell$; wywnioskuj, że rozważana grupa jest skończona.
2. Znajdź komutant i abelianizację grupy $GL_n(K)$ dla $n \geq 3$.
3. Sprawdź, że jeśli $\varphi\colon G \to H$ jest homomorfizmem, a $N \triangleleft H$, to $\varphi^{-1}(N) \triangleleft G$.
4. Uzasadnij, że każda grupa rzędu < 60 jest rozwiązalna.
5. Udowodnij, że: podgrupa grupy rozwiązalnej jest rozwiązalna; grupa ilorazowa grupy rozwiązalnej jest rozwiązalna; produkt grup rozwiązalnych jest rozwiązalny.
6. Sprawdź, że $\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & (a^2-1)b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadania

7. Udowodnij, że proces redukcji słowa w prowadzi zawsze do tego samego słowa zredukowanego (zależnego od w, ale nie od kolejności dokonywania redukcji).
8. Grupę wolną o n generatorach można zdefiniować tak: Rozważamy $\prod_{(G,f)} G$, gdzie produkt jest wzięty po wszystkich parach (G, f), takich że G jest grupą, a f funkcją z $\{1, 2, \ldots, n\}$ w G. W tym produkcie wyróżniamy elementy $x_i = (f(i))_{(G,f)}$, a następnie rozpinamy na nich podgrupę: $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$.

a) Udowodnij, że F_n ma własność uniwersalną: dla dowolnej grupy G i dowolnego ciągu jej elementów $(a_1, \ldots, a_n)$ istnieje jedyny homomorfizm $F_n \to G$ posyłający x_1 w a_1, …, x_n w a_n.

b) Przedyskutuj problemy teoriomnogościowe z definicją F_n. Wytłumacz, jak je ominąć.

9. Niech $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

a) Uzasadnij, że dla dowolnych dwóch domkniętych rozłącznych przedziałów $I = [i_1, i_2], J = [j_1, j_2] \subseteq \mathbf{R}$ istnieje homografia $h_{I,J}\colon x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc = 1$, taka że $h_{I,J}(\overline{\mathbf{R}} \setminus I) = (j_1, j_2)$.

b) Niech $I_1, \ldots, I_n, J_1, \ldots, J_n \subseteq \mathbf{R}$ będą domkniętymi, parami rozłącznymi przedziałami. Uzasadnij, że $\langle h_{I_1,J_1}, \ldots, h_{I_n,J_n}\rangle$ jest wolną podgrupą $PSL_2(\mathbf{R})$.

10. Udowodnij, że w grupie wolnej nie ma nietrywialnych elementów skończonego rzędu.
11. Udowodnij, że dwa komutujące elementy grupy wolnej należą do pewnej podgrupy cyklicznej.
12. Udowodnij, że słowo w nad alfabetem X wyznacza element komutanta grupy wolnej F_X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej litery $x \in X$ suma wykładników wszystkich wystąpień x w w jest równa 0.
13. Pokaż, że skończenia generowana grupa:
    - ma skończenie wiele homomorfizmów w S_n;
    - ma skończenie wiele podgrup indeksu n.
14. Podgrupa skończonego indeksu w grupie skończenie generowanej jest skończenie generowana - tak czy nie?
15. Wykaż, że $\langle a, b \mid a^2, b^3, (ab)^2\rangle \simeq S_3$.
16. Udowodnij, że komutant grupy wolnej $F_{\{x,y\}}$ jest równy $\langle\langle xyx^{-1}y^{-1}\rangle\rangle$.
17. Wyznacz komutant grupy wszystkich izometrii płaszczyzny. Sprawdź, że jest to grupa rozwiązalna.
18. Uzasadnij, że grupa $SL_n(K)$ jest generowana przez $\{I + E_{ij}(a) \mid i \neq j, a \in K\}$.
19. Wyznacz komutant grupy $SL_2(K)$.
20. Sprawdź, że grupa T górnotrójkątnych odwracalnych macierzy $n \times n$ jest rozwiązalna.
21. Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi.

a) Udowodnij, że grupa rzędu pq jest rozwiązalna.

b) Udowodnij, że grupa rzędu pq^2 jest rozwiązalna.

z) Udowodnij, że grupa rzędu pq^z jest rozwiązalna.

22. Czy grupa wolna jest rozwiązalna?

23. Udowodnij, że następujące macierze generują wolną podgrupę F grupy $SO(3)$:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Wsk. Pomnóż przez 5 i licz modulo 5.