Algebra I. Lista1

1. Opisz wszystkie podprzestrzenie $\mathbf{R}^3$.
2. W zbiorze $A = \{(0,0,0,0)^\top, (1,0,1,0)^\top, (1,2,1,3)^\top, (2,2,2,3)^\top, (0,0,0,1)^\top\}$ wskaż podzbiór, który jest bazą $\mathrm{Lin}(A)$ (rzecz dzieje się w $\mathbf{R}^4$).
3. Znajdź bazę podprzestrzeni $\mathbf{R}^5$ zadanej układem równań: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$. (Uzasadnij, że jest to naprawdę baza.)
4. Uzasadnij, że jeśli 3-elementowy zbiór $\{u, v, w\}$ jest bazą V, to również $\{u+v, u+2v+w, w\}$ jest bazą V.
5. Które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami:

a) $C(\mathbf{R})$: $\{f \in C(\mathbf{R}) : f(7) = 0\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) : f(12) \geq f(-12)\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) : (\forall x \in \mathbf{R})(f'(x) \geq 0)\}$, $\{f \in C^1(\mathbf{R}) : (\forall x \in \mathbf{R})(3f'(x) + x^2 f(x) = 0)\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$;

b) przestrzeni $c = \{(a_n)_{n=0}^\infty : a_n \in \mathbf{R}\}$ wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych: $\{(a_n) : (\forall n \geq 0)(a_{n+3} = a_{n+1} - 3a_n)\}$, $\{(a_n) : a_{17} + a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) : a_{17} = a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) : a_5 + a_7 + a_{15} = 0\}$;

c) $\mathbf{R}^3$ – podzbiory określone przez równania: $z^2 = x^2 + 2y^2$, $x + y + 2z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $2x + 3y + z = 0$;

d) przestrzeni wielomianów $\mathbf{R}[X]$: wielomiany stopnia 7, $\{P \in \mathbf{R}[X] : P'(2) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] : P''(-1) + P(4) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] : P''(2) + P(0)^2 = 0\}$,

6. Podaj przykład dwóch baz (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3) przestrzeni $\mathbf{R}^3$, takich że (a_1, b_2, b_3) jest bazą $\mathbf{R}^3$, ale (b_1, a_2, a_3) nie jest bazą $\mathbf{R}^3$.

---

7. (W ciele:) Element a' spełniający $a + a' = a' + a = 0$ nazywamy przeciwnym do a i oznaczamy $-a$. Element a' spełniający $aa' = a'a = 1$ nazywamy odwrotnym do a i oznaczamy a^{-1}. Udowodnij, że element przeciwny / odwrotny jest jedyny. Udowodnij, że $(-1) \cdot a = -a$.
8. Udowodnij, że w dowolnej przestrzeni liniowej V zachodzi (a, b to skalary, v, w – wektory): $a(-v) = (-a)v = -av$; $av = 0 \iff (a = 0 \vee v = 0)$; $av + bw = bv + aw \iff (a = b \vee v = w)$.
9. Uzasadnij, że jeśli $v_1, \ldots, v_n$ są lnz, a v_{n+1} nie jest ich kombinacją liniową, to $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ są lnz. Czy jest też odwrotnie?
10. Uzasadnij, że układ $(v_1, \ldots, v_n)$ jest lnz wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall k \in \{1, \ldots, n\})(v_k \notin \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_{k-1}\})$.
11. Załóżmy, że dla każdego i wybrano wielomian $P_i(X) \in K[X]$ stopnia i. Udowodnij, że:

(a) $(P_0(X), P_1(X), \ldots, P_n(X))$ jest bazą $K_n[X]$;

(b) $(P_0(X), P_1(X), \ldots)$ jest bazą $K[X]$.

12. Udwodnij, że zbiór funkcji potęgowych $\{x^n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ jest lnz w $C(\mathbf{R})$.
13. Udowodnij, że podzbiór przestrzeni liniowej jest jej bazą wtedy i tylko wtedy, gdy jest minimalnym (w sensie inkluzji) zbiorem generującym tę przestrzeń.
14. Załóżmy, że $B \subseteq V$, $\mathrm{Lin}(B) = V$, $|B| = \dim V < \infty$. Udowodnij, że B jest bazą V.

---

15. Uzasadnij, że zbiór $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$ ze zwykłymi działaniami jest ciałem.
16. Niech $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Udowodnij, że $((\varphi^n)_n, ((-\varphi)^{-n})_n)$ jest bazą przestrzeni $\mathrm{Fib} = \{(a_n)_{n=0}^\infty \mid (\forall n \geq 0)(a_n \in \mathbf{R}) \wedge (\forall n \geq 2)(a_n = a_{n-1} + a_{n-2})\}$.
17. Wyznacz wymiar $\mathbf{R}$ jako przestrzeni liniowej nad $\mathbf{Q}$.
18. Udowodnij, że zbiór funkcji $\{\cos(nx) \mid n = 0, 1, \ldots\} \cup \{\sin(nx) \mid n = 1, 2, \ldots\}$ jest lnz w $C(\mathbf{R})$.
19. Wskaż możliwie duży liniowo niezależny podzbiór przestrzeni $V = \{P \in \mathbf{R}[X] : P'(-1) = 0\}$.
20. Uzasadnij, że $\ell^2 = \{(a_n)_{n=0}^\infty \mid a_n \in \mathbf{R}, \sum_{n=0}^\infty a_n^2 < \infty\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych.
21. Ile k-wymiarowych podprzestrzeni ma n-wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem q-elementowym?
22. Niech V będzie przestrzenią liniową, i niech $N \subseteq G \subseteq V$. Załóżmy, że N jest lnz, zaś G jest generujący. Udowodnij, że istnieje baza B przestrzeni V, taka że $N \subseteq B \subseteq G$.
23. Udowodnij, że dwie bazy tej samej przestrzeni liniowej są równoliczne.