Algebra I. Lista 10

Diagonalizacji w praktyce może dopomóc zadanie 7. Można go używać w innych zadaniach.

1. Napisz poprawnie kompilujący się utwór poetycki w swoim ulubionym języku programowania.
2. Znajdź macierz przekształcenia liniowego $\mathbf{R}^2$, dla którego $\binom{1}{0}$ jest wektorem własnym o wartości własnej $-\frac{1}{2}$, zaś $\binom{1}{1}$ jest wektorem własnym o wartości własnej 1.
3. Znajdź wielomian charakterystyczny, wartości własne i podprzestrzenie własne macierzy (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
4. Sprawdź, że jedyną wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ jest 5. To samo zrób dla macierzy $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Sprawdź, że jedna z tych macierzy diagonalizuje się, a druga nie.
5. Znajdź wartości i podprzestrzenie własne. Porównaj krotności algebraiczne z geometrycznymi.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Uzasadnij, że macierz górnotrójkątna która ma parami różne wyrazy na przekątnej jest diagonalizowalna.

---

7. Niech $A \in M_{n\times n}(K)$.

a) Załóżmy, że $P_1, \ldots, P_n$ są lnz wektorami własnymi A odpowiadającymi wartościom własnym $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Uzasadnij, że $A = PDP^{-1}$, gdzie P jest macierzą o kolumnach P_i, zaś D macierzą diagonalną ze skalarami λ_i na przekątnej.

b) Załóżmy, że $A = PDP^{-1}$ dla pewnej odwracalnej kwadratowej P i diagonalnej D. Uzasadnij, że wtedy kolumny P są wektorami własnymi A, zaś wyrazy na przekątnej D są wartościami własnymi A.

8. Przedstaw macierz $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest macierzą diagonalną. Zastosuj tę postać do obliczenia 6-tej potęgi macierzy M.
9. Oblicz $\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -7 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}^{1232} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pomyśl jak zminimalizować ilość potrzebnych rachunków.
10. Znajdź podprzestrzenie własne i wartości własne dla endomorfizmów $\mathbf{R}^3$: (a) obrotu o kąt θ wokół pewnej prostej; (b) rzutu na prostą; (c) rzutu na płaszczyznę; (d) symetrii względem prostej; (e) symetrii względem płaszczyzny.
(O wszystkich prostych i płaszczyznach o których mowa w tym zadaniu zakładamy, że przechodzą przez 0.)
11. Zdiagonalizuj macierz M: znajdź wartości własne i bazę wektorów własnych; zapisz M w postaci PDP^{-1} z diagonalnym D. $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
12. Zbadaj diagonalizowalność macierzy: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.
13. Wyznacz 2-wymiarową podprzestrzeń niezmienniczą endomorfizmu zadanego macierzą $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -7 & 4 & 1 \\ 11 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.
14. Znajdź wzór na $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.
15. Niech ciąg (a_n) będzie zadany rekurencyjnie: $a_0 = 1$, $a_1 = 7$, $a_2 = -1$, $a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n$. Wyprowadź jawny wzór na n-ty wyraz tego ciągu. (Użyj tezy zadania 21.)
16. Udowodnij prawdziwość zdania $(\forall A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}))((\exists \lambda, \mu \in \mathbf{R})(\exists P \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}))(A = P\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)P^{-1}) \iff ((\exists \lambda \in \mathbf{R})(A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)) \vee (\exists a, b \in \mathbf{R})(a \neq b \wedge \det(A - aI) = 0 \wedge \det(A - bI) = 0)))$.

17. Niech $W < V$. Określamy odwzorowanie $p \colon V \to V/W$ wzorem $p(v) = v + W$.

a) Sprawdź, że p jest epimorfizmem.

b) Udowodnij, że jeśli $f \colon V \to Z$ jest liniowe i $W \subseteq \mathrm{Ker} f$, to istnieje jedyne liniowe $F \colon V/W \to Z$, takie że $f = F \circ p$.

18. Podaj przykład endomorfizmu $\mathbf{R}^4$, który ma tylko jedną dwuwymiarową podprzestrzeń niezmienniczą.

19. Załóżmy, że macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ ma n różnych wartości własnych, i że $AB = BA$. Uzasadnij, że (a) macierz B jest diagonalizowalna; (b) $B = P(A)$ dla pewnego $P(X) \in K[X]$.

20. ($\dim V < \infty$) Niech $X \subseteq \mathcal{L}(V)$ będzie zbiorem operatorów diagonalizowalnych i parami przemiennych. Udowodnij, że istnieje baza V której elementy są wspólnymi wektorami własnymi wszystkich operatorów z X.

21. Załóżmy, że wielomian $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} + \ldots - a_1 X - a_0$ ma n różnych pierwiastków $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Udowodnij, że każdy ciąg $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ spełniający (dla wszystkich $k \geq 0$) równanie rekurencyjne

$$x_{k+n} = a_{n-1}x_{k+n-1} + \ldots + a_1 x_{k+1} + a_0 x_k$$

może też być określony wzorem postaci $x_k = c_1\lambda_1^k + \ldots + c_n\lambda_n^k$.
Wsk. Niech $X_k = [x_{k+n}, \ldots, x_{k+1}, x_k]$. Przepisz równanie rekurencyjne w postaci $X_{k+1} = AX_k$ dla odpowiednio dobranej macierzy A. Zdiagonalizuj A.