Algebra I. Lista 11

Na tej liście rozważamy endomorfizmy przestrzeni skończenie wymiarowych, a macierze są kwadratowe.

1. "…/ zostanie tylko Excel Excel / dyktator tabel rozgromionych"
2. Znajdź postacie Jordana i bazy jordanowskie dla macierzy:
$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
3. Ile jest możliwych postaci Jordana 6×6 z trzema wartościami własnymi? (Ignorujemy różnice kolejności.)
4. Rozwiąż równania macierzowe: (a) $M^2 = \left(\begin{smallmatrix}4&1\\0&4\end{smallmatrix}\right)$; (b) $M^2 = \left(\begin{smallmatrix}3&1\\-1&5\end{smallmatrix}\right)$.
5. Znajdź postacie Jordana (najlepiej nie wyznaczając baz jordanowskich) dla macierzy:
$$\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}4&-5&7\\1&-4&9\\-4&0&5\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1\\0&1&1&\dots&1\\0&0&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\dots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}0&1&0&0&\dots&0\\0&0&1&0&\dots&0\\0&0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\dots&\vdots\\0&0&0&0&\dots&1\\1&0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}.$$
6. Wyznacz postać Jordana i bazę jordanowską macierzy $\begin{pmatrix}4&-5\\1&2\end{pmatrix}$.

---

7. W turnieju tenisowym bierze udział 8 zawodników o numerach startowych od 1 do 8. Turniej jest rozgrywany systemem pucharowym. Po turnieju zdefiniowano macierz $A \in M_{8\times 8}(\mathbf{R})$: $a_{ij} = 1$ jeśli i-ty zawodnik grał i wygrał z j-tym; $a_{ij} = 0$ w przeciwnym wypadku. Uzasadnij, że macierz A jest nilpotentna i wyznacz jej postać Jordana.
8. Wyznacz przestrzenie własne, przestrzenie pierwiastkowe, postacie Jordana i bazy jordanowskie odwzorowań F_A, dla $A =$
$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}0&-2&3&2\\1&1&-1&-1\\0&0&2&0\\1&-1&0&1\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&2&-1&1\\-1&1&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}6&-9&5&4\\7&-13&8&7\\8&-17&11&8\\1&-2&1&3\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}-2&1&3&-2\\-2&1&2&-2\\-3&1&4&-2\\-2&1&2&-1\end{pmatrix}.$$
9. Podaj przykład macierzy, której wielomian charakterystyczny to $x^2 - 12x + 36$, a wszystkie wektory własne są postaci $t\left(\begin{smallmatrix}2\\-3\end{smallmatrix}\right)$, $t \in \mathbf{R}$.
10. Znajdź postać Jordana macierzy A, wiedząc że $\chi_A(x) = (3-x)^4(2+x)$, $\text{rząd}(A-3I) = 2$. Czy da się to zrobić, jeśli $\text{rząd}(A-3I) = 1, 3, 4$?
11. Co wiadomo o postaci Jordana zespolonej macierzy A, jeśli: (a) $A^2 = I$; (b) $A^2 = A$; (c) $A^2 = A^3$
12. Uzasadnij, że liczba λ-klatek w postaci Jordana jest równa $\dim V^\lambda$. Niech
$$A = \begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0&0\\0&0&1&\dots&0&0\\0&0&0&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&0&1\\a_1&a_2&a_3&\dots&a_{n-1}&a_n\end{pmatrix}$$
gdzie $a_1, \dots, a_n$ są pewnymi liczbami zespolonymi. Udowodnij, że w postaci Jordana macierzy A każdej wartości własnej odpowiada dokładnie jedna klatka Jordana.
13. Uzasadnij, że jeśli $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ spełnia $A^{10000} = 0$, to również $A^n = 0$.

14. Załóżmy, że $N\colon V \to V$ jest nilpotentne, a $v \in V$ spełnia $N^k v \neq 0$. Wykaż, że wtedy $(v, Nv, N^2 v, \ldots, N^k v)$ jest liniowo niezależnym układem wektorów.
15. Wyznacz zespoloną postać Jordana i bazę jordanowską macierzy [Wsk. wielomian charakterystyczny jest kwadratem pewnego wielomianu stopnia 2.]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Wykaż, że jeśli dla $G\colon V \to V$ mamy $\ker(G^k) = \ker(G^{k+1})$, to $V(0, G) = \ker(G^k)$. Wywnioskuj stąd, że jeśli dla $F\colon V \to V$ mamy $\ker((F - \lambda\mathcal{E})^k) = \ker((F - \lambda\mathcal{E})^{k+1})$, to $V(\lambda, F) = \ker((F - \lambda\mathcal{E})^k)$.

---

17. Udowodnij, że jeśli A jest zespoloną macierzą kwadratową, to istnieje odwracalna zespolona macierz P, taka że $A^\top = PAP^{-1}$. [Wsk. najpierw rozwiąż to zadanie dla jednej klatki Jordana.]
18. Udowodnij, że dla dowolnych $A, B \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ zachodzi $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.
19. Udowodnij, że dowolny endomorfizm F zespolonej przestrzeni liniowej można przedstawić w postaci $S + N$, gdzie S, N są liniowe, S jest diagonalizowalne, N jest nilpotentne, oraz $S \circ N = N \circ S$. Czy przedstawienie takie jest jednoznaczne?
20. W założeniach i oznaczeniach poprzedniego zadania: udowodnij, że istnieją wielomiany P, Q, takie że $S = P(F)$, $N = Q(F)$.
21. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$. Udowodnij, że A jest nilpotentna $\iff$ $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^2) = \ldots = \operatorname{tr}(A^n) = 0$.