

Algebra I. Lista 12

Wszystko dzieje się w standardowym \mathbf{R}^n lub w skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej V , chyba że treść zadania mówi inaczej. Przekształcenie \mathcal{P}_W – rzut prostopadły na podprzestrzeń W – jest opisane w zadaniu 8.

1. Napisz lament na fakt, że macierz ortogonalna nie nazywa się ortonormalna.
2. Uzupełnij do ortogonalnej bazy \mathbf{R}^4 :
 (a) $\{[1, -2, 2, -3], [2, -3, 2, 4]\}$; (b) $\{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]\}$.
3. W \mathbf{R}^4 znajdź ortogonalną bazę podprzestrzeni:
 (a) $\text{Lin}([1, 2, 2, -1], [1, 1, -5, 3], [3, 2, 8, -7])$;
 (b) $\text{Lin}([2, 1, 3, -1], [7, 4, 3, -3], [1, 1, -6, 0], [5, 7, 7, 8])$.
4. Uzasadnij, że jeśli W jest płaszczyzną w \mathbf{R}^3 zadaną równaniem $ax + by + cz = 0$, to $W^\perp = \text{Lin}([a, b, c])$.
5. Udowodnij, że jeśli $\|x\| = \|y\|$, to $x + y \perp x - y$. (Przekątne rombu są prostopadłe.)
6. Zadać układem równań dopełnienie ortogonalne przestrzeni zadanej układem
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0 \end{cases}$$

7. Niech $U, W < V$. Czy jest prawdą, że:
 a) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$;
 b) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
8. Niech $W < V$ ma bazę ortonormalną (e_1, \dots, e_k) . Zdefiniujmy $\mathcal{P}_W: V \rightarrow V$ wzorem $\mathcal{P}_W(v) = \sum_{i=1}^k (v|e_i)e_i$. Udowodnij, że \mathcal{P}_W jest rzutem prostopadłym na W , tzn. że:
 a) $\mathcal{P}_W^2 = \mathcal{P}_W$; b) $\text{Im}\mathcal{P}_W = W$; c) $\ker \mathcal{P}_W = W^\perp$.
 d) Uzasadnij też, że $\mathcal{P}_W + \mathcal{P}_{W^\perp} = \mathcal{E}$.
9. Niech $W < V$. Udowodnij, że dla każdego $v \in V$ i każdego $w \in W \setminus \{\mathcal{P}_W(v)\}$ zachodzi $\|v - w\| > \|v - \mathcal{P}_W(v)\|$.
10. Znajdź rzut prostopadły wektora $[5, 2, -2, 2]$ na $W = \text{Lin}([2, 1, 1, -1], [1, 1, 3, 0], [1, 2, 8, 1])$ i na W^\perp .
11. Napisz macierz rzutu prostopadłego na podprzestrzeń zadaną równaniem $x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$.
12. Wyznacz odległość punktu $[3, 3, -4, 2]$ od podprzestrzeni zadanej układem równań $x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$, $x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$.
13. Niech $W, U < V$. Czy jest prawdą, że $\mathcal{P}_W \circ \mathcal{P}_U = \mathcal{P}_{W \cap U}$? że $\mathcal{P}_{U+W} = \mathcal{P}_U + \mathcal{P}_W$?
14. Niech $W < V$, zaś B niech będzie bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej V . Udowodnij, że każdy wyraz macierzy \mathcal{P}_W w bazie B jest co do modułu nie większy niż 1.
15. Wykaż, że suma kwadratów długości rzutów wektorów dowolnej bazy ortonormalnej na k -wymiarową podprzestrzeń jest równa k .
16. Udowodnij, że iloczyn macierzy ortogonalnych jest macierzą ortogonalną.

17. Uzasadnij, że jeśli W, U są podprzestrzeniami przestrzeni euklidesowej V , zaś $x \in w+W, y \in u+U$ punktami, to $\|x - y\| = \min\{\|a - b\| \mid a \in w + W, b \in u + U\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y \perp W$ i $x - y \perp U$.
18. Niech W, U będą podprzestrzeniami V . Niech $Z = (W + U)^\perp, x \in w + W, y \in u + U$. Uzasadnij, że odległość zbiorów $w + W, u + U$ wynosi $\|\mathcal{P}_Z(x - y)\|$. (Odległość zbiorów A, B to $\inf\{\|a - b\| \mid a \in A, b \in B\}$.) Oblicz odległość zbioru rozwiązań układu $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$ od zbioru $[0, 2, 6, -5] + \text{Lin}([-7, 1, 1, 1], [-10, 1, 2, 3])$.
19. Niech $A \in M_n(\mathbf{R})$ będzie macierzą symetryczną o wyrazach a_{ij} . Udowodnij równoważność warunków:
 a) A jest dodatnio określona;
 b) istnieje baza (b_1, \dots, b_n) przestrzeni \mathbf{R}^n , taka że $(b_i|b_j) = a_{ij}$.
20. Wykaż, że jeśli układ k wektorów w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej ma tę własność, że każde dwa z nich tworzą kąt rozwarty, to $k \leq n + 1$.
21. W przestrzeni $C[0, 1]$ funkcji ciągłych na przedziale $[0, 1]$ z iloczynem skalarnym $(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ wyznacz dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni $\{f \in C[0, 1] \mid f(0) = 0\}$.