Algebra I. Lista 13

Wszystko dzieje się w standardowym $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ lub w skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej/unitarnej V, chyba że treść zadania mówi inaczej.

1. Napisz swoimi słowami, jak rozumiesz zdanie “Obserwabla jest operatorem hermitowskim”.
2. Uzupełnij układ $(1,-1,i,0)^\top, (-1,0,i,-i)^\top$ do ortogonalnej bazy $\mathbf{C}^4$.
3. Sprawdź, że komutator operatorów antyhermitowskich jest antyhermitowski.
4. Udowodnij, że jeśli $U : V \to V$ jest przekształceniem unitarnym, zaś $T = T^*$, to UTU^{-1} jest samosprzężone.
5. Podaj przykład trzymającej 0 izometrii $\mathbf{C}^2$, która nie jest $\mathbf{C}$-liniowa. (Tzn. podaj przykład funkcji $F\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ która nie jest $\mathbf{C}$-liniowa, takiej że $F(0) = 0$, $\|F(x) - F(y)\| = \|x - y\|$ dla wszystkich $x, y \in \mathbf{C}^2$.)
6. Niech $C = (b_1, b_1+b_2)$, gdzie $B = (b_1, b_2)$ jest bazą ortonormalną V; niech $m_B^B(T) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Znajdź $m_C^C(T^*)$.

---

7. Uzasadnij, że jeśli Q jest niezerową symetryczną formą dwuliniową na zespolonej przestrzeni liniowej, to istnieje wektor v taki że $Q(v, v) = -1$. Pokaż na przykładzie, że stwierdzenie to nie zawsze jest prawdziwe jeśli Q zastąpić formą hermitowską.
8. Niech f będzie formą hermitowską na V, zaś $g, h\colon V \times V \to \mathbf{R}$ funkcjami, takimi że $f(x, y) = g(x, y)+ih(x, y)$ dla wszystkich $x, y \in V$. Sprawdź, że wtedy g i h są rzeczywistymi formami dwuliniowymi (na V traktowanej jako rzeczywista przestrzeń liniowa), przy czym g jest symetryczna, a h antysymetryczna.
9. Wyraź $(x|y)$ jako kombinację czterech liczb $\|x \pm y\|^2$, $\|x \pm iy\|^2$.
10. Niech $(e_1, \ldots, e_n)$ będzie ortonormalną bazą V. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in V$:
   a) $x = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i$,
   b) $(x|y) = \sum_{i=1}^n (x|e_i)(e_i|y)$,
   c) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x|e_i)|^2$.
11. Udowodnij, że (a) $(T^*)^* = T$; (b) $(T + S)^* = T^* + S^*$; (c) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$; (d) $(TS)^* = S^*T^*$; (e) $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$; (f) $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$; (g) $\mathrm{Im}(T^*) = \ker(T)^\perp$.
12. Niech U będzie macierzą unitarną. Uzasadnij, że wszystkie wyrazy U^{100} są co do modułu nie większe niż 1.
13. Załóżmy, że $(b_1, \ldots, b_n)$ jest bazą ortonormalną V, zaś $F\colon V \to V$ przekształceniem liniowym, takim że $(F(b_1), \ldots, F(b_n))$ też jest bazą ortonormalną V. Uzasadnij, że F jest ortogonalne/unitarne.
14. Niech $v, w \in V$. Uzasadnij, że jeśli $\|v\| = \|w\|$, to istnieje ortogonalne/unitarne $F\colon V \to V$, takie że $F(v) = w$.
15. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbf{R}$ zachodzi
$$\sqrt{(2a + b)^2 + (2b + c)^2 + (2c + a)^2 + (a + b + c)^2} \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} + \sqrt{2(b^2 + c^2)} + \sqrt{2(c^2 + a^2)}.$$
16. Załóżmy, że $v, w \in \mathrm{Lin}(\{v_1, \ldots, v_k\})$, oraz że $(v|v_i) = (w|v_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Wykaż, że $v = w$.

---

17. Niech $v_1, \ldots, v_k \in V$, $w_1, \ldots, w_k \in V$ spełniają, dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, warunek $(v_i|v_j) = (w_i|w_j)$. Udowodnij, że istnieje przekształcenie ortogonalne/unitarne $U\colon V \to V$, takie że $U(v_i) = w_i$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
18. Niech T będzie rzutem (tzn. niech spełnia $T^2 = T$). Udowodnij, że następujące warunki są równoważne: (a) $T = T^*$; (b) $TT^* = T^*T$; (c) $\mathrm{Im}(T) = (\ker(T))^\perp$.
19. W przestrzeni funkcji gładkich (nieskończenie wiele razy różniczkowalnych) o okresie 2π z iloczynem skalarnym $(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ rozpatrzmy przekształcenie liniowe $\Delta(f) = -f''$. Uzasadnij, że Δ jest przekształceniem samosprzężonym. Znajdź możliwie dużo wektorów własnych Δ i sprawdź bezpośrednim rachunkiem ich ortogonalność.
20. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ będzie macierzą symetryczną. Niech $S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Rozważmy funkcję $f\colon S \to \mathbf{R}$ daną wzorem $f(x) = (Ax|x)$. Załóżmy, że funkcja ta osiąga maksimum w punkcie $v \in S$. Udowodnij, że v jest wektorem własnym A.
21. Niech $a_{ij}\colon (-1, 1) \to \mathbf{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$), takimi że dla każdego $t \in (-1, 1)$ macierz $(a_{ij}(t))$ jest ortogonalna, zaś $(a_{ij}(0)) = E$. Niech $b_{ij} = a'_{ij}(0)$. Udowodnij, że macierz $B = (b_{ij})$ jest antysymetryczna.